

Lokalisierung, α -injektive Moduln und Ringepimorphismen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung
der Philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der Universität Zürich

von
HANS MARTIN AEPPLI
von Maur ZH

Begutachtet von den Herren
Prof. Dr. H. H. Storrer
Prof. Dr. P. Gabriel

Zürich 1980
Zentralstelle der Studentenschaft



Einführung

Im 1. Kapitel wird nach [3] zu einem beliebigen R -Modul M eine Lokalisierungstheorie mit Lokalisierungsfunktor $-_M$ definiert. Einige Eigenschaften werden bewiesen, so ist zum Beispiel $-_M$ idempotent und induziert einen Reflektor auf $L(M)$, der kleinsten vollen Unterkategorie von $R\text{-Mod}$, die M enthält und unter projektiven Limites abgeschlossen ist. Die verallgemeinerten Quotientenringe R_M werden im zweiten Kapitel untersucht. Insbesondere werden alle Oberringe von R bestimmt.

Das Hauptgewicht der Arbeit liegt im Kapitel drei. Lambek und Rattray definieren in [6] zu einem beliebigen R -Modul M einen Lokalisierungsfunktor Q_M . Es gilt immer $-_M \subset Q_M$, Gleichheit ist genau dann der Fall, wenn M die Bedingung der $\mathcal{X}$ -Injektivität in [6] erfüllt. Im Folgenden werden $\mathcal{X}$ -injektive Moduln untersucht. Wie bei den injektiven Moduln genügt ein $\mathcal{X}$ -injektiver Modul M , der über seinem Endomorphismenring endlich erzeugt ist, der von Morita in [10] eingeführten F_h -Bedingung, d.h. es ist $R_M^+ = \text{Bic } M$. Hingegen ist ein Produkt von $\mathcal{X}$ -injektiven Moduln nicht immer $\mathcal{X}$ -injektiv. Eine weitere Querverbindung wird zur Arbeit von Beachy [1] hergestellt. Beachy definiert einen leicht modifizierten Lokalisierungsfunktor $\bar{Q}_M$, der aber für $\mathcal{X}$ -injektive Moduln M mit $-_M$ und Q_M zusammenfällt.

Das letzte Kapitel behandelt Ringepimorphismen. Diese sind spezielle Lokalisierungen. Es werden schwächere Kriterien für Epimorphismen angegeben und auch flache Epimorphismen (im Sinne von [12]) werden untersucht. Zuletzt werden die Ringepimorphismen $D \longrightarrow S$ bestimmt. Dabei ist D der Ring der oberen $n \times n$ Dreiecksmatrizen über einem Körper k .

R ist immer ein assoziativer Ring mit 1. Unter "Modul" verstehen wir, wenn nichts anderes geschrieben steht, R -Linksmodul. Mit $E(X)$ bezeichnen wir die injektive Hülle des Moduls X .

1. M-Lokalisierung

Sei M ein R -Modul. Die Radikale r_M und $\hat{r}_M$ werden wie folgt definiert : Für einen beliebigen Modul X sei

$$r_M(X) = \bigcap \{ \ker f \mid f \in \text{Hom}(X, M) \}$$

und $\hat{r}_M(X) = \sum \{ X' \mid X' \subset X, r_M(X') = X' \}$

$\hat{r}_M$ ist das grösste idempotente Radikal r' mit $r' \subset r_M$. Es kann durch einen transfiniten Prozess gewonnen werden. (Stenström [13])

Ist für einen R -Modul X $r_M(X) = X$ so heisst X M-Torsion . Falls $r_M(X) = 0$, ist X M-torsionsfrei . Ein R -Homomorphismus f heisst M-eigentlich , falls $\text{Hom}(f, M)$ surjektiv ist. M-reguläre Homomorphismen sind R -Homomorphismen , für welche $\text{Hom}(f, M)$ bijektiv ist. Ein Modul X heisst M-lokalisiert , falls alle M -regulären Homomorphismen X -regulär sind. Eine M-Lokalisierung eines Moduls X ist ein M -regulärer Homomorphismus $f: X \rightarrow Y$ in einen M -lokalisierten Modul Y .

- Bemerkungen : 1. M -lokalisierte Moduln sind M -torsionsfrei.
 2. Ein M -eigentlicher Homomorphismus f ist genau dann M -regulär, wenn $\text{Hom}(\text{coker } f, M) = 0$, d.h. $\text{coker } f$ M -Torsion.
 3. Die Existenz einer M -Lokalisierung für jeden Modul X wird durch die folgende Konstruktion gesichert: Sei $f: X \rightarrow Z$ M -eigentlich und Z M -lokalisiert (z.B. $f: X \rightarrow M^{\text{Hom}(X, M)}$) Definieren wir $Y/f(X) = \hat{r}_M(\text{coker } f)$, so ist die induzierte Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eine M -Lokalisierung von X . (Details siehe [3])

Zwei M -Lokalisierungen f_1 und f_2 des gleichen Moduls X sind isomorph, d.h. es gibt einen (eindeutigen) Isomorphismus g mit $gf_1 = f_2$. Wir können deshalb zu jedem Modul X eine M -Lokalisierung auswählen und sie mit $c_X: X \rightarrow X_M$ bezeichnen. Jetzt ist ein Modul X genau dann M -lokalisiert, wenn c_X ein Isomorphismus ist.

Sei X ein M -lokalisierter Modul und $x \in X$. Die Abbildung $g_x: R \rightarrow X, r \mapsto rx$ faktorisiert über c_R :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{c_R} & R_M \\ g_x \searrow & & \swarrow G_x \\ & X & \end{array}$$

Setzen wir $q \cdot x := G_x(q)$ für alle $q \in R_M$, so ist es leicht zu zeigen,

dass die folgende Abbildung X zu einem R_M -Linksmodul macht:

$$G: R_M \times X \longrightarrow X, (q, x) \longrightarrow q \cdot x$$

(Speziell für $X = R_M$ erhalten wir auf R_M eine Ringstruktur.)

Für jeden M -lokalisierten Modul X erhalten wir also eine R_M -Modulstruktur, die die R -Modulstruktur erweitert. Dabei werden R -lineare Abbildungen zwischen M -lokalisierten Moduln R_M -linear. (vergleiche [3])

Lemma 1.1 Ist X M -lokalisiert und Y ein Untermodul von X mit $\hat{r}_M(X/Y) = 0$, so ist Y M -lokalisiert.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass jeder M -reguläre Homomorphismus Y -regulär ist. Sei dazu $f: A \longrightarrow B$ M -regulär und $g: A \longrightarrow Y$ R -linear. g lässt sich über f faktorisieren, was man so einsieht:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & \text{coker } f \\ g \downarrow & \searrow h & \downarrow g' & & \downarrow g'' \\ Y & \xrightarrow{i} & X & \longrightarrow & X/Y \end{array}$$

f ist X -regulär. Es gibt somit ein g' mit $g'f = ig$. g'' existiert nach der universellen Eigenschaft des Cokernes. Da $\text{coker } f$ M -Torsion ist folgt $\text{Hom}(\text{coker } f, X/Y) = 0$, d.h. $g'' = 0$. Somit faktorisiert g' über i und es gibt ein h mit $ihf = ig$, und damit ist $hf = g$. f ist bereits Y -eigentlich. Ferner ist $\text{coker } f$ auch Y -Torsion: $\text{Hom}(\text{coker } f, Y) = 0$, denn $\text{coker } f$ ist M -Torsion und Y ist M -torsionsfrei. Damit ist f Y -regulär.

Die Zuordnung $-_M: R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ mit $-_M(X) = X_M$ ist ein kovarianter Funktor und die Gesamtheit aller c_X ist eine natürliche Transformation $\text{Id}_{R\text{-Mod}} \longrightarrow -_M$. Mit $L(M)$ bezeichnen wir den Limesabschluss von M in $R\text{-Mod}$; d.h. $L(M)$ ist die kleinste volle Unterkategorie von $R\text{-Mod}$, die M enthält und unter Produkten und Kernen abgeschlossen ist.

Proposition 1.2 $L(M)$ ist gleich der vollen Unterkategorie aller M -lokalisierten R -Moduln und $-_M$ ist ein Reflektor auf $L(M)$.

Beweis: Sei $\bar{L}(M)$ die volle Unterkategorie aller M -lokalisierten R -Moduln. $\bar{L}(M)$ ist abgeschlossen unter Produkten (trivial) und Kernen (Lemma 1.1). Da M sicher in $\bar{L}(M)$ liegt, ist $L(M)$ in $\bar{L}(M)$

enthalten. Umgekehrt ist zu zeigen, dass jeder M -lokalisierte R -Modul in $L(M)$ liegt. Sei dazu X M -lokalisiert. Es ist also $X = X_M$ und X_M kann wie folgt gewählt werden: ist $\eta : X \rightarrow M^{\text{Hom}(X, M)}$ kanonisch, so können wir setzen $X_M / \text{im } \eta := \hat{r}_M(\text{coker } \eta)$. $\hat{r}_M$ kann aus r_M wie folgt gewonnen werden: Ist b keine Limeszahl, so sei $r^b = r_M(r^{b-1})$. Ist b eine Limeszahl, so sei $r^b = \bigcap_a r^a$. Nun ist $\hat{r}_M = \bigcap_b r^b$. Wir definieren X^b durch $X^b / \text{im } \eta := r^b(\text{coker } \eta)$. Dadurch haben wir erreicht, dass $X_M / \text{im } \eta = \hat{r}_M(\text{coker } \eta) = \bigcap_b r^b(\text{coker } \eta) = \bigcap_b X^b / \text{im } \eta$ und dies bedeutet $X_M = \bigcap_b X^b$. Es genügt somit, zu zeigen, dass jedes X^b in $L(M)$ liegt.

1. Fall: b ist eine Limeszahl. Es ist $X^b = \bigcap_a X^a$ und weil jedes X^a in $L(M)$ liegt, muss auch X^b in $L(M)$ sein.

2. Fall: b ist keine Limeszahl. Da $X^b \subset X^{b-1}$ und $r_M(X^{b-1} / X^b) = r_M(r^{b-1}(\text{coker } \eta) / r^b(\text{coker } \eta)) = r^b(\text{coker } \eta) / r^b(\text{coker } \eta) = 0$, kann X^{b-1} / X^b in ein direktes Produkt von I Kopien von M eingebettet werden. Die folgende Sequenz ist exakt: $0 \rightarrow X^b \rightarrow X^{b-1} \rightarrow M^I$. Nach Induktionsvoraussetzung liegt X^{b-1} in $L(M)$; M^I liegt auch in $L(M)$ und damit auch X^b .

Zum Beweis, dass $-_M$ Linksadjungierter zur Inklusion $i: L(M) \rightarrow R\text{-Mod}$ ist, betrachte man für einen beliebigen R -Modul X und einen beliebigen R -Modul Y aus $L(M)$ das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c_X} & X_M \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ i(Y) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Für jedes $f: X \rightarrow i(Y)$ gibt es genau ein $f': X_M \rightarrow Y$, denn Y ist ja M -lokalisiert.

Seien M_1 und M_2 zwei Moduln. Mit $c_X^1: X \rightarrow X_{M_1}$ bzw. $c_X^2: X \rightarrow X_{M_2}$ bezeichnen wir die M_1 - bzw. die M_2 -Lokalisierung von X

Definition: Zwei Moduln M_1 und M_2 heißen ähnlich, falls es zu jedem Modul X einen Isomorphismus f_X gibt, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ c_X^1 \swarrow & & \searrow c_X^2 \\ X_{M_1} & \xrightarrow{f_X} & X_{M_2} \end{array}$$

f_X ist eindeutig. Zwei ähnliche Moduln erzeugen somit bis auf Isomorphie den gleichen Lokalisierungsfunktor. Für ähnliche Moduln benützen wir das Zeichen $\sim$.

Lemma 1.3 Für zwei Moduln M_1 und M_2 sind äquivalent:

- 1) $M_1 \sim M_2$
- 2) M_1 ist M_j -lokalisiert für $i=1,2$, $j=1,2$
- 3) $L(M_1) = L(M_2)$
- 4) Es gibt Mengen I, J und injektive Homomorphismen
 $f: M_1 \rightarrow M_2^I$, $g: M_2 \rightarrow M_1^J$ mit $\hat{f}_{M_2}(\text{coker } f) = 0$ und
 $\hat{f}_{M_1}(\text{coker } g) = 0$

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) ist trivial.

2) $\Rightarrow$ 1) Jeder M_1 -reguläre Homomorphismus ist M_j -regulär und jeder M_1 -lokalisierte Modul ist M_j -lokalisiert. $c_X^1: X \rightarrow X_{M_1}$ ist somit auch die M_2 -Lokalisierung von X . Es gibt daher zu jedem Modul X einen Isomorphismus $f_X: X_{M_1} \rightarrow X_{M_2}$ mit $f_X c_X^1 = c_X^2$.

4) $\Rightarrow$ 2) Lemma 1.1

2) $\Rightarrow$ 4) Da M_1, M_2 -torsionsfrei ist, ist $f: M_1 \rightarrow M_2^{\text{Hom}(M_1, M_2)}$ injektiv. Nun gilt $\hat{f}_{M_2}(\text{coker } f) = (M_1)_{M_2} / \text{im } f = \text{im } f / \text{im } f = 0$. Der zweite Teil der Behauptung geht analog.

Interessant ist die Frage, wann es zu einem beliebigen Modul M einen injektiven Modul I gibt, mit $M \sim I$.

Lemma 1.4 Für einen Modul M sind äquivalent:

- 1) r_M linksexakt
- 2) $r_M(E(M)) = 0$
- 3) $-_M$ erhält Monomorphismen

Beweis: 3) $\Rightarrow$ 2) Die Inklusion $i: M \rightarrow E(M)$ bleibt erhalten, d.h. $i_M: M \rightarrow E(M)_M$ ist injektiv. Da $i_M = c_{E(M)}^1 i$, ist $c_{E(M)}^1$ injektiv, d.h. $E(M)$ ist M -torsionsfrei.

2) $\Rightarrow$ 1) trivial, da $r_M = r_{E(M)}$

1) $\Rightarrow$ 3) Sei $f: A \rightarrow B$ injektiv. Weil $r_M(A) = A \cap r_M(B)$, ist die von f induzierte Abbildung $f': A/r_M(A) \rightarrow B/r_M(B)$ injektiv. Weiter ist die Inklusion $i: A/r_M(A) \rightarrow A_M$ wesentlich: ist $T \subset A_M$ mit $T \cap \text{im } i = 0$ so ist $T \subset (T \oplus \text{im } i) / \text{im } i$, d.h. T ist zu einem Untermodul von $\text{coker } i$ isomorph. Dies bedeutet T M -Torsion. Da aber T auch M -tor-

sionsfrei ist, muss $T = 0$ sein. i ist also wesentlich.

Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \longrightarrow & A/r_M(A) & \xrightarrow{i} & A_M \\
 f \downarrow & & f' \downarrow & & f_M \downarrow \\
 B & \longrightarrow & B/r_M(B) & \longrightarrow & B_M
 \end{array}$$

$f_M i$ ist injektiv und damit ist es auch f_M .

Proposition 1.5 Für einen Modul M sind äquivalent:

- 1) Es gibt einen injektiven Modul I mit $M \sim I$
- 2) $M \sim E(M)$
- 3) $r_M(E(M)) = 0$ und $r_M(E(M)/M) = 0$
- 4) $L(M)$ erfüllt die folgende Bedingung:

$$X \in L(M) \Rightarrow E(X) \in L(M) \text{ und } E(E(X)/X) \in L(M)$$

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 4) Es ist $L(M) = L(I)$ und $L(I)$ erfüllt die Bedingung 4) ([8] Theorem 1.1)

4) $\Rightarrow$ 3) Mit M ist auch $E(M)$ in $L(M)$. Somit ist $r_M(E(M)) = 0$. Da $E(E(M)/M)$ in $L(M)$ liegt, ist $E(M)/M$ M -torsionsfrei.

3) $\Rightarrow$ 2) Jeder injektive, M -torsionsfreie Modul ist M -lokalisiert.

D.h. $E(M) \in L(M)$. Umgekehrt ist M auch $E(M)$ lokalisiert: da $r_M = r_{E(M)}$ ist $r_{E(M)}(E(M)/M) = 0$ und nach Lemma 1.1 folgt die Behauptung.

Mit Hilfe von Lemma 1.3 folgt $M \sim E(M)$.

2) $\Rightarrow$ 1) trivial

Die Bedingungen von Proposition 1.5 sind stärker als die von Lemma 1.4. Man nehme für R den Ring der ganzen Zahlen und für M nehme man $R \times E(R)$. Nun ist zwar $r_M = r_{E(M)} = r_{E(R)}$, aber M ist nicht $E(M)$ -lokalisiert: $M_{E(M)} = (R \times E(R))_{E(M)} \cong_{R_{E(M)}} \times_{E(R)} E(M) \cong E(R) \times E(R)$.

Lemma 1.6 Für einen Modul M sind äquivalent:

- 1) Jeder R_M -Modul ist M -torsionsfrei
- 2) $L(M) = R_M\text{-Mod}$ (als Unterkategorien)
- 3) $-_M \cong R_M \otimes -$
- 4) $L(M)$ ist abgeschlossen unter Colimites

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) Sicher ist jeder M -lokalisierte R -Modul auch ein R_M -Modul. Ist umgekehrt B ein R_M -Modul so ist für $f: B \rightarrow M^{\text{Hom}(B, M)}$ coker f ebenfalls ein R_M -Modul, also M -torsionsfrei. Dies bedeutet

$$B \cong B_M$$

2) $\Rightarrow$ 3) zum Inklusionsfunktork $i: R_M\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ sind $-_M$ und $R_M \otimes$ - Reflektoren.

3) $\Rightarrow$ 4) klar, weil $R_M \otimes$ - mit Colimites kommutiert.

4) $\Rightarrow$ 2) sei B ein beliebiger R_M -Modul. Es gibt eine exakte Folge $\oplus R_M \longrightarrow \oplus R_M \longrightarrow B \longrightarrow 0$; nach 4) liegt B in $L(M)$.

2) $\Rightarrow$ 1) klar

Bemerkung: im Beweisschritt 1) $\Rightarrow$ 2) können wir B auch als X_M wählen (für einen geeigneten Modul X), wobei wir X_M mit Hilfe der Abbildung $g: X \longrightarrow {}_M^{\text{Hom}}(X, M)$ konstruieren. Sei $j: X_M \longrightarrow {}_M^{\text{Hom}}(X_M, M)$ die induzierte Inklusion. Es gilt daher $r_M(\text{coker } j) = 0$, und damit ist $r_M(\text{coker } g/(X_M/\text{im } g)) = 0$. Weil r_M ein Radikal ist, ist dies gleichbedeutend mit $r_M(\text{coker } g) = X_M/\text{im } g$. Damit erhalten wir $r_M(\text{coker } g) = \hat{r}_M(\text{coker } g)$. Dies ist gerade die Bedingung der $\mathcal{K}$ -Injektivität, die im 3. Kapitel weiter untersucht wird. Korollar 2.7 in [5] kann somit direkt übernommen werden.

2. Verallgemeinerte Quotientenringe

Für einen injektiven Modul I heisst R_I Quotientenring von R . Lassen wir die Bedingung der Injektivität fallen, so erhalten wir für einen beliebigen Modul M den verallgemeinerten Quotientenring R_M .

Proposition 2.1 Sei $f: R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. S ist genau dann verallgemeinerter Quotientenring von R , wenn die Abbildung $h: \text{End}_R S \longrightarrow S, k \longrightarrow k(1)$ bijektiv ist.

Beweis: ist $f = c_R$ für einen Modul M , so gilt $S = R_M$ und es ist $\text{End}_R S = \text{End}_{R_M} R_M = \text{End}_{R_M}(R_M) = \text{End}_S S$. Damit wird h bijektiv. Ist umgekehrt h bijektiv, so zeigen wir, dass f gerade die S -Lokalisierung von R ist. Dazu genügt es, zu zeigen, dass f S -regulär ist. Sei g aus $\text{Hom}_R(R, S)$ beliebig. Es gibt ein k aus $\text{End}_R S$ mit $k(1) = g(1)$ und k macht das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & S \\ & \searrow g & \swarrow k \\ & S & \end{array}$$

k ist eindeutig, denn aus $k'f = g$ folgt $k'(1) = g(1) = k(1)$ und damit $k = k'$

Korollar 2.2 Ein Ringhomomorphismus $f: R \rightarrow S$ ist genau dann die S -Lokalisierung von R , wenn $\text{End}_R S = \text{End}_S S$.

Beweis: ist f S -regulär, so ist $S = R_S$ und die Behauptung ist klar. Umgekehrt folgt aus $\text{End}_R S = \text{End}_S S$ sofort die Bijektivität von h in Proposition 2.1.

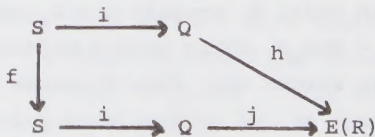
Hat ein Ring S zwei verschiedene Ringendomorphismen, so ist die Abbildung $h: \text{End}_S S \rightarrow S$ nicht injektiv und S ist kein verallgemeinerter Quotientenring von $\mathbb{Z}$. Als Beispiel dafür: $S = \mathbb{C}$ oder auch der Ring der Gauss'schen Zahlen: $\{a+bi \mid a, b \text{ ganz, } i^2 = -1\}$

Korollar 2.2 erlaubt es uns, sämtliche Ringepimorphismen als verallgemeinerte Quotientenringe aufzufassen. (Vgl. Kapitel 4)

Von besonderem Interesse sind die Ringe zwischen R und $Q := R_{E(R)}$, wo Q der maximale (Links-) Quotientenring von R ist. Für einen beliebigen injektiven Modul I ist $c_R: R \rightarrow R_I$ im allgemeinen nicht mehr injektiv; die Behandlung der Ringe zwischen $c_R(R)$ und R_I erfolgt jedoch analog. Die Ringe zwischen R und Q heissen Oberringe.

Lemma 2.3 Ist $R \subset S \subset Q$ ein Oberring von R , so ist $R \subset S$ die S -Lokalisierung von R .

Beweis: nach Korollar 2.2 müssen wir $\text{End}_R S = \text{End}_S S$ zeigen. Sei also f aus $\text{End}_R S$. Mit $*$ bezeichnen wir die Operation von Q auf sich oder auf jedem Q -Modul (z.B. $E(R)$). Bezeichnen wir mit j die Inklusion $Q \rightarrow E(R)$ und mit i die Inklusion $S \rightarrow Q$, so gibt es eine (Q -lineare) Abbildung h , sodass das folgende Diagramm kommutiert:



Seien nun s und x aus S beliebig. Es gilt: $jif(sx) = hi(sx) = h(i(sx)) = h(i(s) * i(x)) = i(s) * h(i(x)) = i(s) * jif(x) = j(i(s) * if(x)) = j(i(s) * i(f(x))) = j(i(sf(x))) = ji(sf(x))$, denn i ist ein Ring-

homomorphismus und j ist Q -linear. Da j injektiv ist, folgt $f(sx) = sf(x)$, d.h. f ist S -linear.

Satz 2.4 Sei R ein Unterring von S . S ist genau dann Oberring von R , wenn es einen R -Modul M gibt mit

- 1) r_M linksexakt
- 2) $R \subset S$ ist die M -Lokalisierung von R

Beweis: sei S ein Oberring von R . Nach Lemma 2.3 ist $R \subset S$ die S -Lokalisierung von R . Weiter ist $R \subset S$ wesentlich und es gilt: $E(R) = E(S)$. Wir setzen $M := S \times E(S)$. Es ist $r_M = r_{E(S)}$ linksexakt. Weiter ist S ein direkter Summand von M und ist damit M -lokalisiert (Lemma 1.1). Es bleibt zu zeigen, dass $R \subset S$ M -regulär ist. $R \subset S$ ist S -regulär. Dadurch wird $R \subset S$ M -eigentlich. Zudem ist S/R Untermodul von Q/R und damit $E(R)$ -Torsion. Da $r_M = r_{E(M)}$, ist S/R M -Torsion. Zusammen erhalten wir die M -Regularität der Inklusion $R \subset S$.

Sei umgekehrt r_M linksexakt. Es ist zu zeigen, dass $S = R_M$ ein Oberring von R ist. Q ist $E(R)$ -lokalisiert und $E(R)$ ist M -lokalisiert. (Mit R ist auch $E(R)$ M -torsionsfrei) Daher ist Q M -lokalisiert. Es gibt genau ein $j: R_M \rightarrow Q$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{c_R} & R_M \\ & \searrow i \quad \swarrow j & \\ & Q & \end{array}$$

Da c_R wesentlich ist (Lemma 1.4, 1) $\Rightarrow$ 3), ist j injektiv. Es bleibt zu zeigen, dass j ein Ringhomomorphismus ist. Mit $*$ bezeichnen wir die Multiplikation in Q . Sei nun x aus Q beliebig und $g_x: R \rightarrow Q, r \mapsto rx$. Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i} & Q \\ & \searrow c_R \quad \swarrow j & \\ & R_M & \\ g_x \swarrow & \downarrow G_x & \searrow \bar{G}_x \\ & Q & \end{array}$$

G_x und $\bar{G}_x$ existieren und sind eindeutig, denn i und c_R sind Q -regulär. Q besitzt als M -lokalisierter Modul eine R_M -Modulstruktur: für $r \in R_M, x \in Q$ ist $r \cdot x := G_x(r)$. genau gleich ist für $q \in Q, x \in Q$ $q * x = \bar{G}_x(q)$.

Da $\bar{G}_x j = G_x$ (C_R ist Q -regulär), folgt also: $r \cdot x = G_x(r) = \bar{G}_x j(r) = j(r) \cdot x$. Beachtet man noch, dass j R_M -linear ist, so haben wir $j(r \cdot s) = r \cdot j(s) = j(r) \cdot j(s)$, was zu zeigen war.

Korollar 2.5 Jeder Oberring S von R ist die $S \times E(R)$ -Lokalisierung von R .

3. $\mathcal{K}$ -Injektivität und die F_h -Bedingung

In [6] definieren Lambek und Rattray einen Lokalisierungsfunktor Q_M auf einer vollständigen Kategorie $\underline{C}$ wie folgt: M sei ein fest gewähltes Objekt aus $\underline{C}$. Die Komposition der beiden Funktoren $F: \underline{C} \longrightarrow \text{Ens}^{\text{OP}}, X \longrightarrow \text{Hom}_{\underline{C}}(X, M)$ und $T: \text{Ens}^{\text{OP}} \longrightarrow \underline{C}, I \longrightarrow M^I$ ergibt den Funktor $S: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}, X \longrightarrow M^{\text{Hom}_{\underline{C}}(X, M)}$. Die Gesamtheit aller $\eta_X: X \longrightarrow M^{\text{Hom}_{\underline{C}}(X, M)}$ mit $p_f \eta_X = f$ ist eine natürliche Transformation $\text{Id}_{\underline{C}} \longrightarrow S$. Sowohl $\eta_{S(X)}$ als auch $S(\eta_X)$ sind Morphismen von $S(X)$ in $S^2(X)$. Wir definieren $(Q_M(X), \mathcal{K}_X)$ als Egalisator von $\eta_{S(X)}$ und $S(\eta_X)$, wobei $\mathcal{K}_X$ der universelle Morphismus $Q_M(X) \rightarrow S(X)$ ist. $Q_M(X)$ ist ein Funktor mit natürlicher Transformation $\eta': \text{Id}_{\underline{C}} \longrightarrow Q_M$, die als Einschränkung von η definiert ist. Sei $\text{Fix}Q_M$ die volle Unterkategorie aller Objekte X aus $\underline{C}$, für welche $\eta'_X: X \longrightarrow Q_M(X)$ ein Isomorphismus ist.

Es gilt der folgende Satz [6]

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1) M ist injektiv bezüglich $\mathcal{K}_X$ für alle X aus $\underline{C}$
- 2) $\text{Fix}Q_M$ ist gleich $L(M)$, dem Limesabschluss von M in $\underline{C}$ und Q_M induziert einen Reflektor $\underline{C} \longrightarrow \text{Fix}Q_M$

Definition: Erfüllt ein Objekt M eine der obigen Bedingungen, so heisst M $\mathcal{K}$ -injektiv.

$\mathcal{K}$ -injektiv bedeutet also: Für jedes Objekt X aus $\underline{C}$ und jeden Morphismus g aus $\text{Hom}_{\underline{C}}(Q_M(X), M)$ gibt es ein g' aus $\text{Hom}_{\underline{C}}(S(X), M)$ welches g erweitert. Für die $\mathcal{K}$ -injektiven Objekte ist es gerade noch möglich, den Lokalisierungsfunktor Q_M idempotent zu erhalten und zwar so, dass Q_M einen Reflektor auf $\text{Fix}Q_M$ induziert. Im Folgenden übertragen wir diese Konstruktion auf $R\text{-Mod}$.

Lemma 3.1 Für alle u, v aus $\text{Hom}_R(S(X), M)$ mit $u \eta_X = v \eta_X$
 ist $u \alpha_X = v \alpha_X$.

Beweis: siehe [6]

Proposition 3.2 Sei M ein R -Modul. Seien Q_M und $\eta_X: X \rightarrow M^{\text{Hom}_R(X, M)}$
 wie oben. Es ist $Q_M(X)/\text{im } \eta_X = r_M(\text{coker } \eta_X)$

Beweis: sei F definiert vermöge $F/\text{im } \eta_X := r_M(\text{coker } \eta_X)$. Sei p die
 Abbildung $M^{\text{Hom}_R(X, M)} \rightarrow \text{coker } \eta_X$. Für ein beliebiges g aus
 $\text{Hom}(\text{coker } \eta_X, M)$ ist $g \eta_X = 0$, also nach Lemma 3.1 $g \alpha_X = 0$ und dies
 bedeutet $\text{gp}(Q_M(X)) = 0$. Da g beliebig, ist $Q_M(X)/\text{im } \eta_X$ in $r_M(\text{coker } \eta_X)$
 enthalten. Es folgt $Q_M(X) \subset F$. Umgekehrt ist die Abbildung $S(\eta_X) - \eta_{S(X)}$
 auf $\text{im } \eta_X$ Null und sie faktorisiert über $\text{coker } \eta_X$. Nach Definition
 ist sie auf F Null und da $Q_M(X) = \ker(S(\eta_X) - \eta_{S(X)})$, ist $F \subset Q_M(X)$.

Ein Vergleich zwischen X_M und Q_M ergibt:

$$Q_M(X)/\text{im } \eta_X = r_M(\text{coker } \eta_X)$$

$$X_M/\text{im } \eta_X = \hat{r}_M(\text{coker } \eta_X)$$

Somit ist $X_M \subset Q_M(X)$ und es stellt sich die Frage nach der Gleichheit.

Lemma 3.3 Sei $f: X \rightarrow M^I$ M -eigentlich. Sei $\bar{X}$ definiert vermöge
 $\bar{X}/\text{im } f := r_M(\text{coker } f)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1) Jeder R -Homomorphismus $\bar{X} \rightarrow M$ lässt sich auf ganz
 M^I erweitern
- 2) $r_M(\text{coker } f) = \hat{r}_M(\text{coker } f)$

Beweis: 2) $\Rightarrow$ 1) Ist 2) erfüllt, so ist $\bar{X} = X_M$ und jeder Homomorphis-
 mus $X_M \rightarrow M$ lässt sich auf M^I erweitern, denn $X \rightarrow X_M$ ist M -regulär.

1) $\Rightarrow$ 2) Wir zeigen, dass $r_M(\text{coker } f)$ M -Torsion ist. Sei dazu
 $g: r_M(\text{coker } f) \rightarrow M$ ein beliebiger R -Homomorphismus. Wir konstru-
 ieren das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & M^I & \xrightarrow{q} & \text{coker } f & \longrightarrow & 0 \\
 \parallel & & \uparrow i & \searrow k & \swarrow h & & \\
 & & & & M & & \\
 & & & \swarrow g & & & \\
 X & \xrightarrow{f'} & \bar{X} & \xrightarrow{p} & r_M(\text{coker } f) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \uparrow j & &
 \end{array}$$

gp lässt sich auf M^I erweitern: es gibt ein k mit $ki = gp$.
 da $kf = kif' = gpf' = 0$, faktorisiert k über q : es gibt ein h mit
 $hq = k$. Nun ist $gp = ki = hqi = hjp$, also $g = hj$. Da aber $hj = 0$,
 ist $g = 0$.

Bemerkung Lemma 3.3 gilt auch dann noch, wenn wir M^I durch einen beliebigen, M -lokalisierten Modul ersetzen.

Definition Die M -dominante Dimension eines Moduls X ist grösser oder gleich zwei, falls es Mengen I, J und eine exakte Folge
 $0 \rightarrow X \rightarrow M^I \rightarrow M^J$ gibt. Bezeichnung: $M\text{-dom.dim } X \geq 2$ (Vgl. z.B. [8])

Nach Lemma 1.1 ist jeder Modul X mit $M\text{-dom.dim } X \geq 2$ M -lokalisiert.
 (Vgl. auch [3] Satz 1.5)

Satz 3.4 Für einen Modul M sind äquivalent:

- 1) M ist $\mathcal{K}$ -injektiv
- 2) Für jeden Modul X existiert ein Isomorphismus f_X , sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c_X} & X_M \\ \eta_X \searrow & & \nearrow f_X \\ & Q_M(X) & \end{array}$$

- 3) Q_M ist idempotent und für jeden Modul X gilt:
 X M -lokalisiert $\Leftrightarrow M\text{-dom.dim } X \geq 2$
- 4) Für jeden M -lokalisierten Modul X ist $r_M(\text{coker } \eta_X) = 0$
- 5) Für jeden Modul X ist $r_M(\text{coker } \eta_X) = \hat{r}_M(\text{coker } \eta_X)$

Beweis: 1) $\Leftrightarrow$ 5) Lemma 3.3 auf η_X angewandt, ergibt die Behauptung.

5) $\Rightarrow$ 2) folgt direkt aus dem Vergleich von Q_M und $-_M$.

2) $\Rightarrow$ 3) mit $-_M$ ist auch Q_M idempotent. Ferner gilt für jeden M -lokalisierten Modul X : $X \cong X_M \cong Q_M(X)$, d.h. mit $Q_M(X)$ hat auch X $M\text{-dom.dim} \geq 2$

3) $\Rightarrow$ 4) Sei X M -lokalisiert, d.h. $\hat{r}_M(\text{coker } \eta_X) = 0$. Es ist also $M\text{-dom.dim } X \geq 2$ und nach [3], Lemma 1.6 zerfällt die exakte Zeile

$0 \rightarrow X \rightarrow Q_M(X) \rightarrow r_M(\text{coker } \eta_X) \rightarrow 0$. Nun wird $Q_M(Q_M(X)) \cong Q_M(X) \oplus Q_M(r_M(\text{coker } \eta_X))$, denn auch die folgende Zeile zerfällt:

$0 \rightarrow Q_M(X) \rightarrow Q_M(Q_M(X)) \rightarrow Q_M(r_M(\text{coker } \eta_X)) \rightarrow 0$

Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X^* & \xrightarrow{i} & Q_M(X) & \longrightarrow & r_M(\text{coker } \eta_X) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow i & & \downarrow h & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Q_M(X) & \xrightarrow{Q_M(i)} & Q_M(Q_M(X)) & \longrightarrow & Q_M(r_M(\text{coker } \eta_X)) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Da Q_M idempotent ist, induziert Q_M einen Reflektor auf sein Bild.

Es muss daher $h = Q_M(i)$ ein Isomorphismus sein. Somit ist

$Q_M(r_M(\text{coker } \eta_X)) = 0$, d.h. $r_M(\text{coker } \eta_X)$ ist M -Torsion. Wir haben

$r_M(\text{coker } \eta_X) = \hat{r}_M(\text{coker } \eta_X) = 0$

4) $\Rightarrow$ 1) Für jeden M -lokalisierten Modul X ist $r_M(\text{coker } \eta_X) = 0$. Es

ist $X \cong Q_M(X) \cong X_M$ und jeder R -Homomorphismus $Q_M(X) \rightarrow M$ lässt

sich auf $M^{\text{Hom}(X,M)}$ erweitern. Ist aber X beliebig, so betrachten

wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M^{\text{Hom}(X_M, M)} & \longrightarrow & \text{coker } \eta_{X_M} \\
 & \nearrow \eta_{X_M} & \downarrow g & & \downarrow g' \\
 X \xrightarrow{c_X} X_M & & M^{\text{Hom}(X, M)} & \longrightarrow & \text{coker } i \\
 & \searrow i & & &
 \end{array}$$

i ist die Inklusion und g der Isomorphismus, der von der Bijektion

$\text{Hom}(c_X, M) : \text{Hom}(X, M) \rightarrow \text{Hom}(X_M, M)$ induziert wird. g' ist ebenfalls

ein Isomorphismus. Es ist $Q_M(X_M)/\text{im } \eta_{X_M} = r_M(\text{coker } \eta_{X_M})$. Auf Grund

der Kommutativität des obigen Diagramms und der Existenz der Iso-

morphismen g, g' folgt, dass $Q_M(X_M) \cong Q_M(X)$ und dass das folgende

kommutative Diagramm existiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Q_M(X_M) & \longrightarrow & M^{\text{Hom}(X_M, M)} \\
 & \nearrow c_X & \downarrow \bar{g} & & \downarrow g \\
 X \xrightarrow{c_X} X_M & & Q_M(X) & \longrightarrow & M^{\text{Hom}(X, M)}
 \end{array}$$

$\bar{g}$ ist ebenfalls ein Isomorphismus. Die Frage, ob sich ein Homomor-

phismus $Q_M(X) \rightarrow M$ auf $M^{\text{Hom}(X, M)}$ erweitern lässt, kann deshalb

für die entsprechende Abbildung $Q_M(X_M) \rightarrow M$ geprüft werden.

Für Abbildungen $Q_M(X_M) \rightarrow M$ haben wir es bereits bewiesen.

Korollar 3.5 Zwei $\mathcal{K}$ -injektive Moduln M_1, M_2 sind genau dann ähnlich, wenn $M_i\text{-dom.dim } M_j \geq 2$, für $i, j = 1, 2$

Beweis: dies folgt unmittelbar aus Lemma 1.3 und obigem Satz.

In [5] definiert Lambek die Relation "similar" für $\mathcal{K}$ -injektive Moduln, ohne eine Bedingung dafür anzugeben, wann zwei Moduln "similar" sind. Korollar 3.5 gibt eine Antwort.

Im Folgenden sei $D(M)$ die volle Unterkategorie aller R -Moduln X , für die $M\text{-dom.dim } X \geq 2$. Es ist immer $D(M) \subset L(M) \subset R_M\text{-Mod}$ (als Unterkategorien)

Korollar 3.6 Erfüllt M eine der folgenden Bedingungen, so ist

M $\mathcal{K}$ -injektiv:

- 1) $r_M = f_M$, insbesondere r_M linksexakt
- 2) M ist injektiv in $D(M)$
- 3) $L(M) = R_M\text{-Mod}$ (d.h. M ist Cogenerator in $R_M\text{-Mod}$)
- 4) R_M ist halbeinfacher Ring
- 5) M ist injektiver $(R/\text{Ann } M)\text{-Modul}$ ([5] Seite 172)
- 6) M ist Morita-injektiv (vgl. Definition vor Prop.3.14)

Beweis: 1) und 2) sind klar. Für 3) vergleiche man mit der Bemerkung nach Lemma 1.6. Bei 4), 5) und 6) ist M jedes Mal injektiver $R_M\text{-Modul}$.

Oft ist es schwierig, von einem gegebenen Modul zu zeigen, dass er (nicht) $\mathcal{K}$ -injektiv ist. Meistens benutzt man eine stärkere Eigenschaft von Korollar 3.6. Zudem ist die Klasse aller $\mathcal{K}$ -injektiven Moduln nicht unter Produkten abgeschlossen (ein Gegenbeispiel folgt später) und es ist eine offene Frage, ob sich die $\mathcal{K}$ -Injektivität unter der Relation $\sim$ vererbt. Eine teilweise Antwort gibt uns das nächste Lemma.

Lemma 3.7 Gibt es in einer Ähnlichkeitsklasse von R -Moduln einen

Modul M , der in $D(M)$ injektiv ist, so sind alle Moduln dieser Klasse $\mathcal{K}$ -injektiv.

Beweis: Sei M injektiv in $D(M)$ und $M' \sim M$. Nach Satz 3.4 genügt es, zu zeigen, dass für jeden M' -lokalisierten Modul X

$r_M(\text{coker } \eta_X) = 0$, wo $\eta_X: X \rightarrow M^{\text{Hom}(X, M')}$ kanonisch. $M^{\text{Hom}(X, M')}$ lässt sich in ein Produkt M^I einbetten. Es existiert daher das folgende kommutative Diagramm mit injektiven Homomorphismen i, j :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\eta_X} & M^{\text{Hom}(X, M')} & \longrightarrow & \text{coker } \eta_X \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow i & & \downarrow j \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i \cdot \eta_X} & M^I & \longrightarrow & M^I / i_X(X) \longrightarrow 0 \end{array}$$

X ist $M^\perp$ - und M -lokalisiert, liegt also in $D(M)$ (M ist k -injektiv). $i \cdot \eta_X$ ist eine Abbildung zwischen zwei Moduln, die in $D(M)$ sind. Damit ist $i \cdot \eta_X$ M -eigentlich. M^I ist M -lokalisiert und die M -Lokalisierung von X ist durch $X_M / \text{im}(i \cdot \eta_X) = \hat{f}_M(\text{coker } i \cdot \eta_X)$ gegeben. Da aber $X \cong X_M$, η_X ist $\hat{f}_M(\text{coker } i \cdot \eta_X) = 0$. Nach Lemma 3.3 erhalten wir $r_M(\text{coker } i \cdot \eta_X) = \hat{f}_M(\text{coker } i \cdot \eta_X) = 0$. Wegen der Injektivität von j ist nun auch $\text{coker } \eta_X$ M -torsionsfrei, was zu zeigen war.

Korollar 3.8 Sei T eine beliebige Menge von Primzahlpotenzen $p_i^{s_i}$ mit beschränkten Exponenten s_i . Dann ist $\prod_{t \in T} \mathbb{Z}_t$ eine $\mathfrak{A}$ -injektive abelsche Gruppe.

Beweis: Für jede Primzahl p , die als Basis in T auftritt, gibt es einen maximalen Exponenten n_p mit $p^{n_p} \in T$. Wir setzen $M = \prod_p \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$. M ist Morita-injektiv ([4], Theorem 1.9) und damit injektiv in $D(M)$ ([1], Prop. 1.7). Nach Lemma 3.7 genügt es, zu zeigen, dass $M \cap M' = 0$, wo $M' = \prod_t \mathbb{Z}_t$. M ist direkter Summand von M' , d.h. M ist M' -lokalisiert. Umgekehrt ist M' auch M -lokalisiert: ist t aus T beliebig, $t = p^s$, so haben wir $s + r = n_p$ und die Abbildung $f: \mathbb{Z}_t \rightarrow \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$, $\bar{1} \mapsto \bar{p}^r$ wird injektiv. Da aber $\text{coker } f \cong \mathbb{Z}_{p^r}$ in $\mathbb{Z}_{p^{n_p}}$ eingebettet werden kann, ist nach Lemma 1.1 $\mathbb{Z}_t$ $\mathbb{Z}_{p^{n_p}}$ -lokalisiert. $\mathbb{Z}_{p^{n_p}}$ ist M -lokalisiert. Zusammen ergibt sich, dass $\mathbb{Z}_t$ M -lokalisiert ist. $L(M)$ ist unter Produkten abgeschlossen; auch M' liegt in $L(M)$.

Lemma 3.9 Sei I eine Menge. Es gibt Homomorphismen $\bar{I}$ und ψ , sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & M^{\text{Hom}(X,M)} \\ & \searrow \eta & \swarrow \psi \\ & (MI)^{\text{Hom}(X,MI)} & \end{array}$$

$\bar{I}$

ferner ist $\bar{I}\psi = \text{Id}$

Beweis: jedem g aus $\text{Hom}(X, M^I)$ entspricht eindeutig eine Familie g_i aus $\text{Hom}(X, M)$. Für i aus I definieren wir $p_i: M^I \rightarrow M$ als Projektion; ebenso für g aus $\text{Hom}(X, M^I)$ $p_g: (MI)^{\text{Hom}(X,MI)} \rightarrow M^I$ und für f aus $\text{Hom}(X, M)$ $p_f: M^{\text{Hom}(X,M)} \rightarrow M$.

Konstruktion von ψ : sei g aus $\text{Hom}(X, M^I)$ fest. Wir erhalten das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & M^{\text{Hom}(X,M)} & & \\ \downarrow \eta & \swarrow \psi & \downarrow \eta_g & \searrow p_{f_i} & \\ (MI)^{\text{Hom}(X,MI)} & \xrightarrow{p_g} & M^I & \xrightarrow{p_i} & M \end{array}$$

Für i aus I sei $f_i := p_i p_g \eta$. Nun kommutiert das äussere Viereck, denn es ist $p_i p_g \eta = f_i = p_{f_i} \eta_X$. Die Familie $(p_{f_i})_i$ induziert ψ_g und machen wir dies für jedes g , erhalten wir ψ mit $\psi \eta_X = \eta$.

Konstruktion von $\bar{I}$: sei f aus $\text{Hom}(X, M)$. Wir definieren $\bar{f}: X \rightarrow M^I$ wie folgt: wir wählen ein i_0 aus I fest und setzen

$$\bar{f} p_i = \begin{cases} f, & \text{falls } i = i_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & M^{\text{Hom}(X,M)} & & \\ \downarrow \eta & \nearrow \bar{I} & \searrow \eta_f & & \\ (MI)^{\text{Hom}(X,MI)} & \xrightarrow{p_{\bar{f}}} & M^I & \xrightarrow{p_{i_0}} & M \end{array}$$

Es ist $p_{i_0} p_{\bar{f}} \eta = p_f \eta_X$ nach Konstruktion von $\bar{f}$. Setzen wir $\bar{\eta}_f := p_{i_0} p_{\bar{f}}$, induziert die Familie $(\bar{\eta}_f)_f$ eine Abbildung $\bar{\eta}$ mit $p_f \bar{\eta} = \bar{\eta}_f$. Es bleibt zu zeigen, dass $\bar{\eta}$ ein Schnitt ist. Für f aus $\text{Hom}(X, M)$ gilt: $p_f(\bar{\eta} \psi) = (p_f \bar{\eta}) \psi = (p_{i_0} p_{\bar{f}}) \psi = p_{i_0} \psi_{\bar{f}} = p_h$, wobei $h = p_{i_0} p_{\bar{f}} = f$. Also ist $p_f(\bar{\eta} \psi) = p_f$, was zu zeigen war.

Proposition 3.10 Ist M $\mathfrak{A}$ -injektiv, so ist für jede Menge I M^I $\mathfrak{A}$ -injektiv.

Beweis: nach Satz 3.4 genügt es, zu zeigen, dass für jeden M^I -lokalisierten Modul X $r_{M^I}(\text{coker } \eta) = 0$, wobei η wie in Lemma 3.9 definiert ist. Das folgende Diagramm kommutiert und hat exakte Zeilen und Spalten:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\eta_X} & M^{\text{Hom}(X, M)} & \longrightarrow & \text{coker } \eta_X \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \bar{\eta} & & \downarrow \bar{\eta}' \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\eta} & (M^I)^{\text{Hom}(X, M^I)} & \longrightarrow & \text{coker } \eta \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \bar{\eta} & & \downarrow \bar{\eta}' \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{ker } \bar{\eta} & \longrightarrow & \text{ker } \bar{\eta}' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Es ist $\text{coker } \eta \cong \text{coker } \eta_X \times \text{ker } \bar{\eta}'$. Weiter ist $r_M = r_{M^I}$. Da X M -lokalisiert ist, ist $r_M(\text{coker } \eta_X) = 0$ (M k -injektiv). Zudem ist $\text{ker } \bar{\eta}' \cong \text{ker } \bar{\eta}$ M -torsionsfrei. Zusammen erhalten wir $r_M(\text{coker } \eta) = 0$.

Für einen injektiven Modul I ist nach [7] Theorem 5.6 bekannt, dass R_I mit dem Bikommutator von I^I zusammenfällt. Unser nächstes Ziel ist es, diese Behauptung für $\mathfrak{A}$ -injektive Moduln zu zeigen. Ist M ein beliebiger Modul, setzen wir $S := \text{End}_R^M$ und

$$\text{Bic } M := \text{End } M_S$$

$\text{Bic } M$ ist ein Ring und $\delta: R \longrightarrow \text{Bic } M$, $r \longrightarrow r \cdot$ ist ein Ringhomomorphismus. Nach [3] Satz 2.1 ist R_M (nach Identifikation) ein Unterring von $\text{Bic } M$. Gleichheit, d.h. $R_M = \text{Bic } M$, gilt genau dann, wenn M der von Morita in [10] eingeführten F_h -Bedingung genügt: $r_M(\text{Bic } M / \text{im } \delta) = \text{Bic } M / \text{im } \delta$, d.h. $\text{coker } \delta$ muss M -Torsion sein.

Dies ist äquivalent dazu, dass die folgende Abbildung bijektiv ist :
 $\text{Hom}_R(\text{Bic } M, M) \longrightarrow M, f \longrightarrow f(1)$. Vgl. [3] Definition 2.2

Lemma 3.11 Sei $m_1, m_2, \dots, m_n$ ein Erzeugendensystem von M über $S := \text{End}_R M$ und $\tilde{\Phi} : R \longrightarrow M^n, r \longrightarrow (rm_1, \dots, rm_n)$ sowie $\eta_R : R \longrightarrow M^M$ kanonisch. Dann gibt es Homomorphismen h, k sodass das folgende Diagramm kommutiert :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & M^n \\ & \searrow \eta_R & \nearrow k \\ & M^M & \nearrow h \end{array}$$

Ferner ist $kh = \text{Id}_{M^n}$

Beweis: ist $p_i : M^n \longrightarrow M$ die i -te Projektion, so definieren wir $p_i k := p_{m_i}$, wo $p_{m_i} : M^M \longrightarrow M$ die m_i -te Projektion ist. Damit ist $k \eta_R = \tilde{\Phi}$. Um h anzugeben, genügt es, für jedes m aus M $p_m h$ zu definieren. Sei dazu m aus M beliebig fest. Es gibt nun s_i aus S mit $m = \sum m_i s_i$. Wir setzen $p_m h : M^n \longrightarrow M, (x_i) \longrightarrow \sum x_i s_i$. Nun kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & M^n \\ \downarrow \eta_R & & \downarrow q_m := p_m h \\ M^M & \xrightarrow{p_m} & M \end{array}$$

, denn es ist $q_m \tilde{\Phi}(r) = \sum (rm_i) s_i = r \sum m_i s_i = rm = p_m \eta_R(r)$. Speziell gilt $h \tilde{\Phi} = \eta_R$. Wählen wir für m_i die Darstellung $m_i = \sum m_j s_j$, wo $s_j = 0$ für $i \neq j$ und $s_i = \text{Id}_M$, erhalten wir: $p_{m_i} h(x_1, \dots, x_n) = x_i = p_i(x_1, \dots, x_n)$. Damit ist $p_i kh(x_1, \dots, x_n) = p_{m_i} h(x_1, \dots, x_n) = x_i = p_i(x_1, \dots, x_n)$ für alle i . Wir erhalten : $kh = \text{Id}_{M^n}$.

Bemerkung Für den Lokalisierungsfunktor $-_M$ können wir voraussetzen, dass M über seinem Endomorphismenring endlich erzeugt ist. Ist M beliebig, so ist M zu M^M ähnlich und M^M ist über $\text{End}_R(M^M)$ endlich erzeugt.

Proposition 3.12 Ist M über $S = \text{End}_R M$ endlich erzeugt, sind äquivalent

- 1) M erfüllt die F_h -Bedingung
- 2) Jeder Homomorphismus $f: Q_M(R) \longrightarrow M$ lässt sich auf ganz M^M erweitern
- 3) $R_M = Q_M(R)$

Beweis: 2) $\Leftrightarrow$ 3) folgt unmittelbar aus Lemma 3.3 und dem Vergleich zwischen $-_M$ und Q_M .

1) $\Rightarrow$ 3) Betrachte das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\quad \mathfrak{I} \quad} & M^n & \longrightarrow & \text{coker } \mathfrak{I} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \uparrow k \quad \downarrow h & & \uparrow k' \quad \downarrow h' \\
 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\quad \mathfrak{I}_R \quad} & M^M & \longrightarrow & \text{coker } \mathfrak{I}_R \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \uparrow \downarrow & & \uparrow \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ker k & \xrightarrow{\quad \mathfrak{I} \quad} & \ker k' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Nach [3], (Folgerung 2.7, 1) $\Rightarrow$ 2)) ist $r_M(\text{coker } \mathfrak{I}) = \hat{f}_M(\text{coker } \mathfrak{I})$

Da alle Zeilen und Spalten exakt sind, haben wir

$\text{coker } \mathfrak{I}_R = \text{coker } \mathfrak{I} \times \ker k'$. Somit ist $r_M(\text{coker } \mathfrak{I}_R) = r_M(\text{coker } \mathfrak{I})$, denn $\ker k'$ ist M -torsionsfrei. Zusammen ergibt dies: $r_M(\text{coker } \mathfrak{I}_R) = r_M(\text{coker } \mathfrak{I}) = \hat{f}_M(\text{coker } \mathfrak{I}) = \hat{f}_M(\text{coker } \mathfrak{I}_R)$.

3) $\Rightarrow$ 1) nach [3], Folgerung 2.7 genügt es, zu zeigen, dass $r_M(\text{coker } \mathfrak{I}) = \hat{f}_M(\text{coker } \mathfrak{I})$. Da $\mathfrak{I}$ M -eigentlich ist, kann R_M durch $R_M/\text{im } \mathfrak{I} := \hat{f}_m(\text{coker } \mathfrak{I})$ konstruiert werden. Andererseits erhalten wir R_M auch durch $R_M/\text{im } \mathfrak{I}_R = \hat{f}_M(\text{coker } \mathfrak{I}_R)$.

Im folgenden Diagramm sind das linke und das rechte Rechteck kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccc}
 R & \xrightarrow{\quad \mathfrak{I} \quad} & M^n & \longrightarrow & \text{coker } \mathfrak{I} & \longrightarrow & 0 \\
 & \searrow c_R & \uparrow i & & \uparrow i' & & \downarrow h' \\
 & & R_M & \longrightarrow & \hat{f}_M(\text{coker } \mathfrak{I}) & & \\
 & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & R_M & \xrightarrow{\quad h \quad} & \hat{f}_M(\text{coker } \mathfrak{I}_R) & & \\
 & \searrow c_R & \downarrow j & & \downarrow j' & & \\
 R & \xrightarrow{\quad \mathfrak{I}_R \quad} & M^M & \longrightarrow & \text{coker } \mathfrak{I}_R & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Aus der M-Regularität von c_R folgt $hi = j$, wo i und j die Inklusionen sind. i' , j' und h' sind von i , j und h induziert. $h'(r_M(\text{coker } \tilde{h})) \subset r_M(\text{coker } \tilde{h}_R) = \hat{r}_M(\text{coker } \tilde{h}_R) = h'(\hat{r}_M(\text{coker } \tilde{h}))$. Weil h' injektiv ist, folgt $r_M(\text{coker } \tilde{h}) = \hat{r}_M(\text{coker } \tilde{h})$.

Korollar 3.13 1) Ist M $\mathcal{X}$ -injektiv und über End_R^M endlich erzeugt, erfüllt M die F_h -Bedingung
 2) Ist M $\mathcal{X}$ -injektiv, so ist $R_M = \text{Bic } M^M$
 3) Jeder Oberring ist ein Bikommutator

Beweis: 1) folgt sofort aus 2) in Prop. 3.12

2) M^M ist über $\text{End}_R(M^M)$ endlich erzeugt und nach Prop. 3.10 auch $\mathcal{X}$ -injektiv.

3) Ist S ein Oberring von R , so ist nach Kor. 2.5 S die $S \times E(S)$ -Lokalisierung von R . Setze $M = S \times E(S)$. r_M ist linksexakt. Nach Korollar 3.6 ist M $\mathcal{X}$ -injektiv. Es folgt $S \cong \text{Bic } M^M$.

Bemerkung Aus Prop. 3.12, 3) folgt insbesondere, dass dann auch $Q_M(R) = \text{Bic } M$ sein muss.

Nun sind wir in der Lage, einen Modul anzugeben, der nicht $\mathcal{X}$ -injektiv ist.

Beispiel Sei k ein Körper und D der Ring der oberen $n \times n$ Dreiecksmatrizen über k . Sei N das Jacobson-Radikal von D und $E = D e_{nn}$, wo e_{nn} die folgende Matrix ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

D/N enthält von jedem einfachen Modul S_i genau eine Kopie und es ist $D/N = \bigoplus S_i$, $i = 1, \dots, n$. Wir setzen $M = D/N \times E$.

Die Elemente von M können als Matrizen der folgenden Form aufgefasst werden:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_1 \\ 0 & x_2 & 0 & \dots & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & x_3 & \dots & 0 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n & y_n \end{pmatrix}$$

Einfach Matrizenrechnung ergibt: $\text{End}_D(D/N) \cong k^n$, $\text{End}_D E \cong k$,

$\text{Hom}_D(D/N, E) \cong \text{Hom}_D(S_1, E) \cong k$, $\text{Hom}_D(E, D/N) \cong \text{Hom}_D(E, S_n) \cong k$.

Ab jetzt sei $n \geq 3$

Wir können $\text{End}_D M$ in Matrizenform schreiben: jedem f aus $\text{End}_D M$ entspricht genau eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & p_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & t \end{pmatrix}$$

mit $(p_i), r, t, u$ aus k . $\text{End}_D M$ operiert auf M via Matrizenmultiplikation.

Sei $h: M \rightarrow M$,
$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_1 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & \dots & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & \dots & 0 & y_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & x_n & y_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_n & y_n \end{pmatrix}$$

Eine einfache Rechnung zeigt: $h(xs) = h(x)s$ für alle s aus $\text{End}_D M$.

h liegt somit in $\text{Bic } M$. h ist aber keine Linksmultiplikation mit einem Element aus D : Wäre $h = d \cdot$ für ein d aus D , so wären die Diagonalelemente d_{ii} von d für $i = 2, 3, \dots, n-1$ alle Null. Setzen wir:

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

so ist nun $y = h(y) = d \cdot y$

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Abbildung $\delta: D \rightarrow \text{Bic } M, d \mapsto d \cdot$ nicht surjektiv ist.

Da $r_M \subset r_{D/N}$ und $r_{D/N}$ das Jacobsonradikal ist, muss $\hat{r}_M = \hat{r}_{D/N} = 0$ sein. Jeder M -torsionsfreie Modul ist somit M -lokalisiert.

Weil D in E^n eingebettet werden kann, ist D M -lokalisiert. Nach [3], Satz 2.5 genügt M der F_h -Bedingung nicht. Zudem ist M über $\text{End}_D M$ endlich erzeugt. Nach Korollar 3.13 ist M nicht $\mathfrak{A}$ -injektiv.

Diese Tatsache ist umso erstaunlicher, wenn man bedenkt, dass E injektiv und D/N quasiinjektiv ist. Nach Korollar 3.6 ist D/N ebenfalls $\mathfrak{A}$ -injektiv. Das obige Beispiel zeigt, dass ein Produkt von $\mathfrak{A}$ -injektiven Moduln nicht mehr $\mathfrak{A}$ -injektiv sein muss.

In [7] definiert Morita Moduln vom Typ FI: Ein Modul M ist vom Typ FI, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- 1) M ist injektiver Bic M -Modul
- 2) M ist über End_R^M endlich erzeugt
- 3) M erfüllt die F_h -Bedingung

Proposition 3.14 M ist genau dann vom Typ FI, wenn gilt

- 1) M ist injektiver R_M -Modul
- 2) M ist über End_R^M endlich erzeugt

Beweis: Ist M vom Typ FI, so ist $R_M = \text{Bic } M$

Erfüllt umgekehrt M die Bedingungen 1) und 2), so ist nach

Korollar 3.6 M $\mathcal{A}$ -injektiv, erfüllt nach Korollar 3.12 die F_h -Bedingung. Nun ist auch $R_M = \text{Bic } M$ und M ist injektiv in Bic M -Mod.

Moduln vom Typ FI wurden von Beachy in [1] untersucht. Dabei wird auf folgende Art ein Lokalisierungsfunktor $\bar{Q}_M$ definiert:

Für einen Modul M mit $S := \text{End}_R^M$ betrachten wir den Funktor

$T: R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$, $X \longrightarrow \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(X, M), M)$, mit natürlicher Transformation $\bar{\eta}_X: X \longrightarrow T(X)$, $x \longmapsto \text{Evaluation an } x$. Es sei

$$\bar{Q}_M(X)/\text{im } \bar{\eta}_X := r_M(\text{coker } \bar{\eta}_X)$$

Da $T(X)$ in $M^{\text{Hom}_R(X, M)}$ eingebettet werden kann, erinnert diese Definition stark an die Definition von Q_M .

Proposition 3.15 Für jeden Modul X gibt es injektive

Homomorphismen i, j , sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \swarrow c_X & \downarrow \bar{\eta}_X & \searrow \eta_X & \\ X_M & \xrightarrow{i} & \bar{Q}_M(X) & \xrightarrow{j} & Q_M(X) \end{array}$$

Beweis: Wir identifizieren $T(X)$ mit seinem Bild in $M^{\text{Hom}(X, M)}$

Nun ist $r_M(T(X)/\text{im } \bar{\eta}_X) \subset r_M(\text{coker } \eta_X)$, d.h. $\bar{Q}_M(X) \subset Q_M(X)$. Nach [1], p.229 ist T ein Funktor $R\text{-Mod} \longrightarrow D(M)$; $T(X)$ ist M -lokalisiert.

Da $\bar{\eta}_X: X \longrightarrow T(X)$ M -eigentlich ist, kann X_M durch

$X_M / \text{im } \bar{r}_X := \hat{r}_M(\text{coker } \bar{r}_X)$ erhalten werden. Da $\hat{r}_M \subset r_M$, folgt die Existenz von i .

Korollar 3.16 Ist M $\mathfrak{X}$ -injektiv, so ist für jeden Modul X

$$X_M \cong \bar{Q}_M(X) \cong Q_M(X)$$

Beweis: folgt aus Satz 3.4 und Proposition 3.15

Lemma 3.17 Es ist $R_M = \bar{Q}_M(R)$ genau dann, wenn sich jeder R -Homomorphismus $h: \bar{Q}_M(R) \longrightarrow M$ auf $\text{Bic } M$ erweitern lässt.

Beweis: Ist $R_M = \bar{Q}_M(R)$, so ist die Behauptung evident.

Ist umgekehrt die obige Bedingung erfüllt, so betrachte man

$\delta: R \longrightarrow \text{Bic } M, r \longrightarrow r \cdot$. δ ist M -eigentlich und $\text{Bic } M = T(R)$

ist M -lokalisiert. Wir können somit setzen: $R_M / \text{im } \delta = \hat{r}_M(\text{coker } \delta)$

Lemma 3.3 ergibt $\hat{r}_M(\text{coker } \delta) = r_M(\text{coker } \delta)$, d.h. $R_M = \bar{Q}_M(R)$.

Bemerkung Die Bedingung von Lemma 3.17 findet sich in [1] Lemma 1.5. Es vereinfachen sich in [1] die Beweise von 1.6, 1.7, 1.10, denn es ist immer $\bar{Q}_M(R) = R_M$.

Für einen Modul M , der über End_R^M endlich erzeugt ist, gelten die folgenden Implikationen:

M quasiinjektiv

$1 \Rightarrow M$ ist vom Typ FI

$2 \Rightarrow M$ ist injektiv in $D(M)$

$3 \Rightarrow M$ $\mathfrak{X}$ -injektiv

$1 \Rightarrow$ gilt, denn M ist injektiver $R/\text{Ann } M$ -Modul. Damit ist M injektiver R_M -Modul und M ist nach Prop. 3.14 vom Typ FI. $1 \Rightarrow$ ist nicht umkehrbar: Für $R = \mathbb{Z}$ $M := \mathbb{Z}_p$, p prim, ist vom Typ FI, enthält $\mathbb{Z}$ und ist damit nicht quasiinjektiv. (Sonst wäre M injektiv)

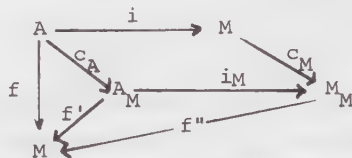
$2 \Rightarrow$ gilt, da $D(M)$ Unterkategorie von $\text{Bic } M$ -Mod. Ob die Umkehrung gilt, ist offen; man vergleiche dazu Lemma 3.18

$3 \Rightarrow$ gilt nach Korollar 3.6. Die Umkehrung gilt nicht: Für $R = \mathbb{Z}$

sei $M := R \times E(R)$. r_M ist linksexakt. Nach Korollar 3.6 ist M $\mathfrak{X}$ -injektiv. Wäre M injektiv in $D(M)$, so könnte jeder Homomorphismus $n\mathbb{Z} \longrightarrow M$ auf ganz $\mathbb{Z}$ erweitert werden und M wäre injektiv.

Lemma 3.18 Ist r_M linksexakt und M injektiv in $D(M)$, so ist M quasiinjektiv.

Beweis: Sei A ein Untermodul von M und f aus $\text{Hom}_R(A, M)$ beliebig. Betrachte das folgende Diagramm:



f' existiert, da c_A M -regulär ist. Nach Lemma 1.4 ist i_M injektiv. Nun lässt sich f' nach Voraussetzung auf M_M erweitern.

4. Ringepimorphismen

Ein Ringhomomorphismus $f: R \longrightarrow S$ ist ein Ringepimorphismus, falls f in der Kategorie der Ringe ein Epimorphismus ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist: (vergleiche auch [14])

- 1) $S\text{-Mod}$ ist volle Unterkategorie von $R\text{-Mod}$
- 2) Für jedes s aus S gibt es einen Zickzack über $f(R)$, d.h. es gibt Elemente x_i, y_j aus S , a_{ij} aus $f(R)$ mit $s = \sum_{ij} x_i a_{ij} y_j$, wobei $\sum_i x_i a_{ij} \in f(R)$ für alle j und $\sum_j a_{ij} y_j \in f(R)$ für alle i .
- 3) $S \otimes_R S \cong S$ (als Bimoduln) ([7], Theorem 7.1)
- 4) In $S \otimes_R S$ ist $s \otimes 1 = 1 \otimes s$ für alle s aus S

Die Bedingung 4) kann noch abgeschwächt werden:

Proposition 4.1 Ein Ringhomomorphismus $f: R \longrightarrow S$ ist genau dann ein Epimorphismus, wenn zu jedem s aus S ein s' aus S existiert, sodass in $S \otimes_R S$ gilt:
 $s \otimes 1 = 1 \otimes s'$ oder $1 \otimes s = s' \otimes 1$

Beweis: Die eine Richtung ist trivial.

Sei umgekehrt $s \otimes 1 = 1 \otimes s'$. Wir wählen ein Erzeugendensystem $(x_i)_i$ von ${}_R S$ wie folgt:

Zu einem beliebigen Erzeugendensystem $\bar{x}_i$ ($i \neq 0, 1$) nehmen wir noch $x_0 = -1$ und $x_1 = s'$ dazu. Sei $(r_i)_i$ die Familie aus S mit $r_0 = s$, $r_1 = 1$, $r_i = 0$ für $i \neq 1$, $i \neq 0$.

Nun ist $\sum_i r_i \otimes x_i = (s \otimes -1) + (1 \otimes s') = 0$. Es gibt somit Elemente a_{ij} aus $f(R)$, y_j aus S mit $r_i = \sum_j y_j a_{ij}$ für alle i und $\sum_i a_{ij} x_i = 0$ für alle j . Da aber $s = r_0 = \sum_j y_j a_{0j}$, und $a_{0j} = -a_{0j} x_0 = -\sum_{i=1} a_{ij} x_i$, erhalten wir:

$$s = \sum_j y_j \left(\sum_{i=1} a_{ij} x_i \right) = \sum_{i,j} y_j a_{ij} x_i$$

Dies ist ein Zickzack über $f(R)$, denn $\sum_{i=1} a_{ij} x_i = a_{0j}$ liegt in $f(R)$ und ebenso $\sum_j y_j a_{ij} = r_i$, da i ungleich 0 ist.

Proposition 4.2 Ein Ringepimorphismus $f: R \longrightarrow S$ ist die S -Lokalisierung von R (als Links- und Rechtsmodul)

Beweis: S -Mod ist volle Unterkategorie von R -Mod. Insbesondere ist $\text{End}_R S = \text{End}_S S$. Nach Korollar 2.2 ist f die S -Lokalisierung von R . Die Argumentation für Rechtsmoduln geht analog.

Lemma 4.3 Ist $h: R_M \longrightarrow R_M \otimes_R R_M$, $r \longrightarrow r \otimes 1$, so ist

$$R_M \otimes_R R_M = h(R_M) \oplus r_{R_M}(R_M \otimes_R R_M)$$

Beweis: Da $\text{Hom}_R(R_M \otimes_R R_M, R_M) \cong \text{Hom}_R(R_M, \text{Hom}_R(R_M, R_M))$ und $\text{Hom}_R(R_M, R_M) \cong \text{Hom}_{R_M}(R_M, R_M) \cong R_M$, erhalten wir den Isomorphismus $\text{Hom}_R(R_M \otimes_R R_M, R_M) \longrightarrow R_M$, $g \longrightarrow g(1 \otimes 1)$.

Sei nun g aus $\text{Hom}_R(R_M \otimes_R R_M, R_M)$ beliebig. Wir setzen $g(1 \otimes 1) = r$. Die Abbildung $g_r: R_M \otimes_R R_M \longrightarrow R_M$, $\sum_i x_i \otimes r_i \longrightarrow (\sum_i x_i r_i) r$ ist R -linear. Da $g_r(1 \otimes 1) = r = g(1 \otimes 1)$, folgt $g = g_r$.

Somit ist jede Abbildung aus $\text{Hom}_R(R_M \otimes_R R_M, R_M)$ ein Rechtsvielfaches der Abbildung $k: R_M \otimes_R R_M \longrightarrow R_M$, $\sum_i x_i \otimes r_i \longrightarrow \sum_i x_i r_i$. Daher ist $\ker k \subset r_{R_M}(R_M \otimes_R R_M)$ und weil die umgekehrte Inklusion trivial ist, haben wir Gleichheit. Es ist leicht zu zeigen, dass $kh = \text{Id}$, d.h. $R_M \otimes_R R_M = h(R_M) \oplus \ker k = h(R_M) \oplus r_{R_M}(R_M \otimes_R R_M)$.

Mit Hilfe von Lemma 4.3 können wir untersuchen, wann eine M -Lokalisierung von R ein Epimorphismus ist. (Dies ist genau dann der Fall, wenn obige Abbildung h ein Isomorphismus ist)

Proposition 4.4 Für einen Modul M sind äquivalent:

- 1) $c_R: R \longrightarrow R_M$ ist ein Epimorphismus
- 2) $R_M \otimes_R R_M$ ist R_M -torsionsfrei
- 3) $R_M \otimes_R R_M$ ist M -torsionsfrei

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) evident, da h von Lemma 4.3 ein Isomorphismus ist

2) $\Rightarrow$ 3) trivial, da R_M in M^M eingebettet ist

3) $\Rightarrow$ 1) Sei $f: R_M \longrightarrow R_M \otimes_R R_M$, $r \longmapsto (r \otimes 1) - (1 \otimes r)$.

f ist R -linear. Weiter ist die M -Lokalisierung von $R_M \otimes_R R_M$ eine injektive Abbildung. Betrachten wir die folgende Komposition:

$$R \xrightarrow{c_R} R_M \xrightarrow{f} R_M \otimes_R R_M \xrightarrow{c} (R_M \otimes_R R_M)_M$$

Es ist $fc_R = 0$, also auch $cfc_R = 0$. Da c_R M -regulär ist, folgt $cf = 0$, d.h. $f = 0$. Wir erhalten daher $r \otimes 1 = 1 \otimes r$ für alle r aus R_M .

Korollar 4.5 Ist eine der folgenden Bedingungen erfüllt, ist

$c_R: R \longrightarrow R_M$ ein Epimorphismus:

- 1) M ist ein Cogenerator in R_M -Mod
- 2) R_M ist ein Cogenerator in R_M -Mod
- 3) R_M ist projektiver R -Linksmodul
- 4) R_M ist halbeinfacher Ring

Beweis: 1) und 2) folgen sofort aus Proposition 4.4.

In 3) und 4) ist jedesmal $R_M \otimes_R R_M$ projektiver R_M -Linksmodul, erfüllt daher die Bedingung 2) von Proposition 4.4

Bemerkung Man vergleiche 1) von Korollar 4.5 mit Lemma 1.6

Korollar 4.6 Ein Ringhomomorphismus $f: R \longrightarrow S$ ist genau dann ein Epimorphismus, wenn gilt:

- 1) $\text{End}_R S = \text{End}_S S$
- 2) $r_S(S \otimes_R S) = 0$

Beweis: Folgt aus Korollar 2.2 und Proposition 4.4

Ein anderes Kriterium dafür, dass $c_R: R \longrightarrow R_M$ ein Epimorphismus ist, wird im nächsten Lemma bewiesen. Es hat den Vorteil, dass darin keine Tensorprodukte verwendet werden.

Lemma 4.7 $c_R: R \longrightarrow R_M$ ist genau dann ein Epimorphismus, wenn gilt:

- (*) Ist s_i Erzeugendensystem von ${}_R(R_M)$ und r_i eine Familie aus R_M , $r_i = 0$ für fast alle i , mit $\sum_i r_i s_i = 0$, so gibt es Elemente a_{ij} aus R , u_j aus R_M , sodass gilt:
- 1) $a_{ij} = 0$ für fast alle (i, j)
 - 2) $\sum_i a_{ij} s_i = 0$ für alle j
 - 3) $r_i = \sum_j u_j a_{ij}$ für alle i

Beweis: Sei c_R ein Epimorphismus. Sind $(s_i)_i$ und $(r_i)_i$ gemäß (*), so ist $\sum_i r_i \otimes s_i = \sum_i r_i (1 \otimes s_i) = \sum_i r_i (s_i \otimes 1) = (\sum_i r_i s_i) \otimes 1 = 0$ und (*) ist erfüllt.

Es gelte umgekehrt (*). Nach Proposition 4.4 genügt es, zu zeigen, dass $r_{R_M} (R_M \otimes R_M) = 0$, d.h. $\{ \sum_i x_i \otimes r_i / \sum_i x_i r_i = 0 \} = 0$

Sei dazu $x = \sum_i x_i \otimes r_i$ mit $\sum_i x_i r_i = 0$. Wir erweitern (r_i) zu einem Erzeugendensystem (r_j) und (x_i) durch Hinzunahme von Nullen zu (x_j) . Es ist $\sum_j x_j r_j = \sum_i x_i r_i = 0$. Nach (*) gibt es Elemente a_{jk} aus R , u_k aus R_M mit $\sum_j a_{jk} r_j = 0$ und $x_j = \sum_k u_k a_{jk}$. Durch Einsetzen erhalten wir $x = \sum_i x_i \otimes r_i = \sum_j x_j \otimes r_j = 0$

Definition Ein flacher Epimorphismus $f: R \longrightarrow S$ ist ein Epimorphismus, sodass S_R vermöge f flacher R -Rechtsmodul wird.

Silver [12] definiert solche Ringhomomorphismen gerade als Linkslokalisierungen von R . In [11] haben Popescu und Spircu flache Epimorphismen als spezielle Lokalisierungen an injektiven Moduln charakterisiert. Lemma 4.7 hat ein Analogon für flache Epimorphismen.

Proposition 4.8 $c_R: R \longrightarrow R_M$ ist genau dann flacher Epimorphismus, wenn gilt:

- (**) Sind r_i, s_i aus R_M , $i = 1, 2, \dots, n$, mit $\sum_i r_i s_i = 0$, so gibt es Elemente a_{ij} aus R , u_j aus R_M mit
- 1) $\sum_i a_{ij} s_i = 0$ für alle j
 - 2) $r_i = \sum_j u_j a_{ij}$ für alle i

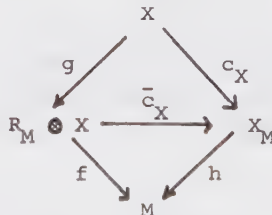
Beweis: Ist c_R ein flacher Epimorphismus und $\sum_1 r_i s_i = 0$, so betrachten wir den von $s_1, \dots, s_n$ erzeugten Untermodul $\langle s_1, \dots, s_n \rangle$. Da R_M flach ist, ist $R_M \otimes \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ Untermodul von $R_M \otimes R_M$. Nun ist $\sum_1 r_i \otimes s_i$ in $R_M \otimes R_M$ und damit in $R_M \otimes \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ Null, woraus (**) folgt.

Ist umgekehrt (**) erfüllt, ist c_R nach Lemma 4.7 ein Epimorphismus. Ersetzen wir in (**) die s_i durch Elemente aus $c_R(R)$, so erhalten wir gerade die Bedingung der Flachheit von R_M .

Unser nächstes Ziel ist es, zu untersuchen, wann R_M flacher R -Rechtsmodul ist. Wir beschränken uns zudem auf linksexakte Radikale r_M und erhalten nach 2.4 mindestens alle Oberringe von R .

Lemma 4.9 Ist $c_X: X \longrightarrow X_M$ die M -Lokalisierung von X , so ist $\bar{c}_X: R_M \otimes X \longrightarrow X_M$, $\sum_1 r_i \otimes x_i \longrightarrow \sum_1 r_i c_X(x_i)$ die M -Lokalisierung von $R_M \otimes X$.

Beweis: Sei $g: X \longrightarrow R_M \otimes X$, $x \longrightarrow 1 \otimes x$. Es ist $\bar{c}_X g = c_X$. Coker $\bar{c}_X$ ist epimorphes Bild von coker c_X und damit M -Torsion. Es bleibt zu zeigen, dass $\bar{c}_X$ M -eigentlich ist. Sei dazu f aus $\text{Hom}_R(R_M \otimes X, M)$ beliebig. Es gibt einen Homomorphismus h , sodass das äussere Viereck kommutiert:



Es ist $h c_X = f g$, denn c_X ist M -regulär. h und f sind R_M -linear, als Abbildungen von einem R_M -Modul in einen M -lokalisierten Modul [3].

Für x aus $R_M \otimes X$ gilt nun: $h \bar{c}_X(x) = h \bar{c}_X(\sum_1 r_i \otimes x_i) = \sum_1 h \bar{c}_X(r_i (1 \otimes x_i)) = \sum_1 r_i h \bar{c}_X g(x_i) = \sum_1 r_i f g(x_i) = \sum_1 r_i f(1 \otimes x_i) = \sum_1 f(r_i \otimes x_i) = f(x)$.

Damit ist $\bar{c}_X$ M -eigentlich.

Proposition 4.10 Sei r_M linksexakt. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- 1) R_M ist flacher R -Rechtsmodul
- 2) Für jedes endlich erzeugte Linksideal A von R ist $R_M \otimes_R A$ R_M -torsionsfrei
- 3) Für jedes endlich erzeugte Linksideal A von R ist $R_M \otimes_R A$ M -torsionsfrei.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) klar, da $R_M \otimes A$ in R_M eingebettet werden kann.

2) $\Rightarrow$ 3) R_M ist Untermodul von M^M .

3) $\Rightarrow$ 1) Es ist zu zeigen, dass für jedes endlich erzeugte Linksideal A , mit Inklusion $i: A \rightarrow R$ die Abbildung $R_M \otimes i$ injektiv ist. Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i} & R & & \\
 \downarrow g_A & \searrow \bar{c}_A & \downarrow & \searrow \bar{c}_R & \\
 & A_M & \xrightarrow{i_M} & R_M & \\
 \uparrow \bar{c}_A & & \downarrow g_R & \uparrow \bar{c}_R & \\
 R_M \otimes A & \xrightarrow{R_M \otimes i} & R_M \otimes R & &
 \end{array}$$

g_A , g_R , $\bar{c}_A$, $\bar{c}_R$ sind wie in Lemma 4.9 definiert. $\bar{c}_R$ ist ein Isomorphismus. $\bar{c}_A$ ist injektiv, als M -Lokalisierung des M -torsionsfreien Moduls $R_M \otimes A$.

Mit i_M (Lemma 1.4) ist daher auch $R_M \otimes i = \bar{c}_R^{-1} i_M \bar{c}_A$ injektiv.

Korollar 4.11 Ein Oberring S von R ist genau dann flacher R -Rechtsmodul, wenn für jedes endlich erzeugte Linksideal A von R $S \otimes_R A$ S -torsionsfrei ist.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Satz 2.4 und obiger Proposition.

Korollar 4.12 Ist ein Oberring S von R ein Cogenerator in S -Mod, so ist $R \subset S$ flache epimorphe Erweiterung von R

Beweis: Jeder Oberring S ist die S -Lokalisierung von R (Kor. 2.5)

Nach Lemma 1.6 ist $R \subset S$ ein Epimorphismus und nach Proposition 4.10 ist S_R flach, denn es ist auch $S = R_M$ mit $M = S \times E(S)$.

Korollar 4.13 Ist R linkshalberblich und r_M linksexakt, so ist R_M flacher R -Rechtsmodul.

Beweis: Ist A ein endlich erzeugtes Linksideal von R , so ist A ein direkter Summand von R^n . Damit wird $R_M \otimes_R A$ direkter Summand von R_M^n , ist also R_M -torsionsfrei.

Bemerkungen 1) Alle Oberringe eines linkshalberblichen Ringes R sind flache R -Rechtsmoduln. (Satz 2.4.)

2) Lässt sich ein Oberring S eines linkshalberblichen Ringes R in einen freien Modul F einbetten, ist $R \subset S$ flache epimorphe Erweiterung, denn $S \otimes S$ ist Untermodul des S -torsionsfreien Moduls $S \otimes F$. Nach 4.4. ist $R \subset S$ ein Ringepimorphismus.

Sei k ein Körper und D der Ring der oberen $n \times n$ Dreiecksmatrizen über k . Als Abschluss dieses Kapitels bestimmen wir alle Ringepimorphismen mit Definitionsbereich D . Dazu führen wir die folgenden Definitionen bzw. Notationen ein: Bezeichnen wir die Matrizeneinheiten mit e_{ij} , so entspricht jedem D -Modul M die folgende Darstellung V von $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow \dots \leftarrow n$ über k :

$$e_{11}^M \xleftarrow{e_{12}} e_{22}^M \xleftarrow{e_{23}} e_{33}^M \xleftarrow{e_{34}} \dots \xleftarrow{e_{n-1,n}} e_{nn}^M$$

Sind umgekehrt $V_1, \dots, V_n$ k -Vektorräume und $f_i: V_{i+1} \rightarrow V_i$ k -lineare Abbildungen, so erhalten wir aus der Darstellung den D -Modul

$M := \bigoplus V_i$ vermöge der Definition

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}f_1(v_2) + a_{13}f_1(f_2v_3) + \dots \\ a_{22}v_2 + a_{23}f_2(v_3) + \dots \\ \vdots \\ a_{nn}v_n \end{bmatrix}$$

Die D -Moduln und die Darstellungen von $1 \leftarrow 2 \leftarrow \dots \leftarrow n$ über k entsprechen sich in dieser Weise eindeutig.

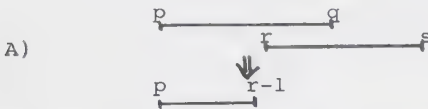
Sind p, q natürliche Zahlen mit $1 \leq p \leq q \leq n$, verstehen wir unter dem Intervall $[p, q]$ die Menge $\{x \in \mathbb{N} / p \leq x \leq q\}$. Zu jedem Intervall $[p, q]$ gehört eine unzerlegbare Darstellung $k_{[p, q]}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \leftarrow & 2 & \dots & p-1 & \leftarrow & p & \leftarrow & p+1 & \dots & q-1 & \leftarrow & q & \leftarrow & q+1 & \dots & n \\ 0 & \leftarrow & 0 & \dots & 0 & \leftarrow & k & \xleftarrow{1} & k & \xleftarrow{1} & \dots & \xleftarrow{1} & k & \xleftarrow{1} & k & \leftarrow & 0 & \dots & 0 \end{array}$$

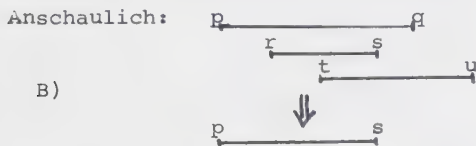
Nach [2] ist jede Darstellung V direkte Summe von Darstellungen der Form k_I , wo I ein Intervall ist, d.h. $V = \bigoplus_I k_I^{(n_I)}$.

Sei $\mathcal{M}$ eine beliebige Teilmenge von Intervallen. $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ sei die volle Unterkategorie $\left\{ \bigoplus_{I \in \mathcal{M}} k_I^{(n_I)} / n_I \text{ beliebige Kardinalzahl} \right\}$. $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ ist nicht nur bezüglich direkter Summen abgeschlossen, sondern auch bezüglich direkter Produkte: zu jeder Kardinalzahl n gibt es eine Kardinalzahl m mit $k_I^n \cong k_I^{(m)}$.

$\mathcal{M}$ erfüllt die Bedingung A), falls mit $[p, q]$ und $[r, s]$ in $\mathcal{M}$ mit $p < r \leq q \leq s$ auch $[p, r-1] \in \mathcal{M}$, oder anschaulich:



$\mathcal{M}$ erfüllt die Bedingung B), falls mit $[p, q]$, $[r, s]$ und $[t, u]$ in $\mathcal{M}$ mit $p < r \leq s < q$ und $r \leq t \leq s$ und $q \leq u$ auch $[p, s]$ in $\mathcal{M}$ ist.



Lemma 4.14 Sei $\mathcal{M}$ eine beliebige Teilmenge von Intervallen. Sei $M := \bigoplus_{I \in \mathcal{M}} k_I$ und $L(M)$ der Limesabschluss von M in $D\text{-Mod}$ (vgl. Prop. 1.2). Äquivalent sind:

- i) $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ ist bezüglich Kernbildung abgeschlossen
- ii) $\mathcal{M}$ erfüllt die Bedingungen A) und B)
- iii) $\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = L(M)$

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii) A) ist trivial, denn $k_{[p, r-1]}$ ist der Kern jedes Homomorphismus $f: k_{[p, q]} \longrightarrow k_{[r, s]}$, falls $f \neq 0$. Nehmen wir zwei beliebige Homomorphismen $f: k_{[p, q]} \longrightarrow k_{[r, s]}$ und $g: k_{[r, s]} \longrightarrow k_{[t, u]}$ beide nicht Null, ist $k_{[p, s]}$ direkter Summand von $\text{Ker}(f+g)$.

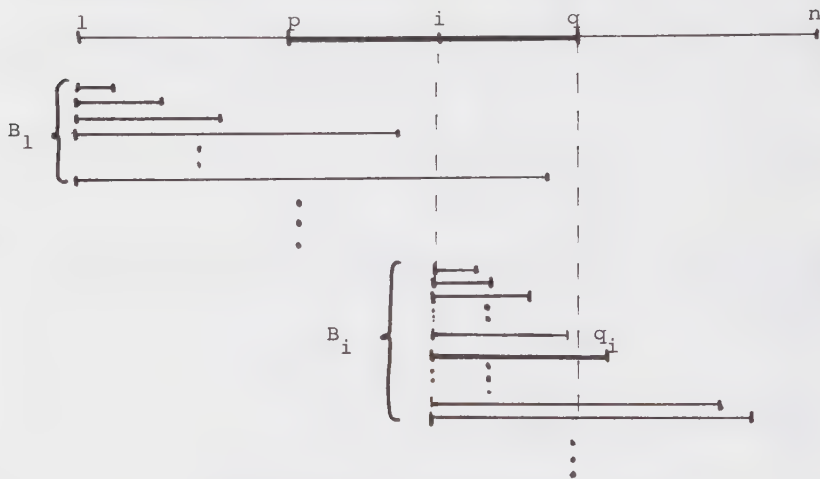
iii) $\Rightarrow$ i) ist klar, da $L(M)$ bezüglich Kernbildung abgeschlossen ist.

ii) $\Rightarrow$ iii) k_I ist M -lokalisiert für jedes I aus $\mathcal{M}$. Da $k_I^{(n)}$ direkter Summand von k_I^n ist, ist $k_I^{(n)}$ für jede Kardinalzahl n M -lokalisiert. Damit ist $\mathcal{L}_{\mathcal{M}} \subset L(M)$. Umgekehrt genügt es, zu zeigen, dass jeder M -lokalisierte Modul zu einem Ausdruck $\bigoplus_{I \in \mathcal{M}} k_I^{(n_I)}$

isomorph ist. Dazu zeigen wir, dass für irgend ein Intervall J

$$(k_J)_M \cong \bigoplus_{I \in \mathcal{M}_I} k_I^{d_I} \quad \text{mit } d_I \in \{0, 1\}.$$

Sei also $J = [p, q]$ beliebiges Intervall. Wir ordnen die Intervalle von $\mathcal{M}$ wie folgt: Intervalle mit gleichem Anfangspunkt i fassen wir zu Blöcken B_i zusammen. Innerhalb eines Blockes ordnen wir nach der Länge. Wir erhalten so die folgende Situation:



Für jedes i , $p \leq i \leq q$ definieren wir $A_i := \{s \in N / [i, s] \in \mathcal{M}, q \leq s\}$

weiter sei $q_i := \begin{cases} \min A_i, & \text{falls } A_i \text{ nicht leer} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$M_i := \begin{cases} [i, q_i], & \text{falls } q_i \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anschaulich ist $[i, q_i]$ im Block B_i das kürzeste Intervall, dessen Endpunkt grösser oder gleich q ist. Dies ist äquivalent zu:

$[i, q_i]$ ist das kürzeste Intervall I im i -ten Block mit

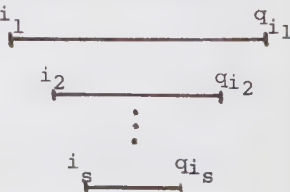
$\text{Hom}_D(k_J, k_I) \neq 0$. Wir haben noch einige M_i zu eliminieren:

Sei $i_1 := \min\{i / M_i \neq 0\}$

$i_2 := \min\{i > i_1 / \text{Hom}_D(M_{i_1}, M_i) = 0\}$

$\vdots$

$i_s := \min\{i > i_{s-1} / \text{Hom}_D(M_{i_{s-1}}, M_i) = 0\}$



Dieses Verfahren bricht einmal ab und wir erhalten eine Folge

$$p \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq q \leq q_{i_m} < q_{i_{m-1}} < \dots < q_{i_2} < q_{i_1}.$$

Behauptung: $(k_J)_M \cong \bigoplus_{s=1}^m M_{i_s}.$

Für jedes s wählen wir ein $c_s: k_J \longrightarrow M_{i_s}$ beliebig, $c_s \neq 0$.

Es genügt nun, zu zeigen, dass $c: k_J \longrightarrow \bigoplus M_{i_s}$, $c(x) := (c_s(x))_s$

M -regulär ist. Sei zu diesem Zwecke I ein beliebiges Intervall

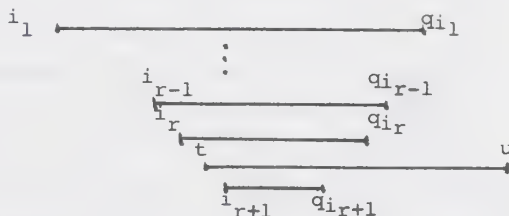
aus $\mathcal{M}$ und $f: k_J \longrightarrow k_I$ beliebig. Sei t der Anfangspunkt von I .

1. Fall $t < p$. Es ist $f = 0$. Weiter ist auch $t < i_s$ für alle s und

damit $\text{Hom}_D(M_{i_s}, k_I) = 0$. Die eindeutige Faktorisierung von f über c ist der Nullmorphismus.

2. Fall $p \leq t \leq q$. Wir legen I zu den Intervallen $[i_s, q_{i_s}]$. Wir zeigen zuerst: es gibt genau ein s mit $\text{Hom}_D(M_{i_s}, k_I) \neq 0$.

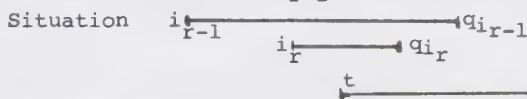
Sicher gibt es genau ein r mit $i_r \leq t < i_{r+1}$



Der Endpunkt von I sei u . O.B.d.A. ist $q \leq u$, denn sonst ist $f = 0$ und $\text{Hom}_D(M_{i_s}, k_I) = 0$ für alle s .

Sicher ist $q_{i_r} \leq u$, denn andernfalls hätten wir entweder noch zusätzlich M_t unter den M_{i_s} (falls $t \neq i_r$) oder $[i_r, q_{i_r}]$ wäre noch nicht das kürzeste Intervall (falls $t = i_r$).

Weiter ist auch $u < q_{i_{r-1}}$, denn andernfalls hätten wir die

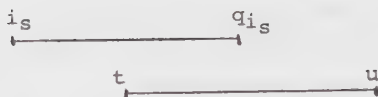


Nach der Bedingung B) wäre $[i_{r-1}, q_{i_r}]$ in $\mathcal{M}$ und wir hätten im Block B_{r-1} nicht das kürzeste Intervall genommen.

Es gilt also $q_{i_r} \leq u < q_{i_{r-1}}$ und es gibt genau ein s mit $\text{Hom}_D(M_{i_s}, k_I) \neq 0$, nämlich $s = r$. Damit wird die Faktorisierung von f über c via M_{i_r} eindeutig.

3. Fall $q < t$. Es ist $f = 0$. Es genügt, zu zeigen, dass

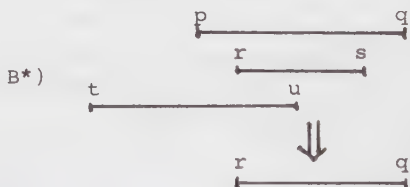
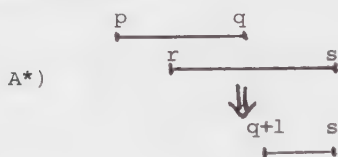
$\text{Hom}_D(M_{i_s}, k_I) = 0$ für alle s . Wäre dies für ein s nicht der Fall, so hätten wir die folgende Situation



Nach A) wäre auch $[i_s, t-1]$ in $\mathcal{U}$. Da aber $q \leq t-1$, hätten wir im Block B_s nicht das kürzeste Intervall genommen.

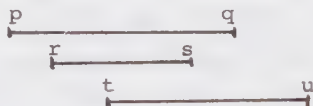
Damit faktorisiert jedes $g: k_J \rightarrow M \oplus k_I$ eindeutig über c .

Die dualen Bedingungen von A) und B) bezeichnen wir mit A*) und B*). Es sind dies:



Korollar 4.15 $\mathcal{U}$ ist bezüglich Kern- und Cokernbildung abgeschlossen genau dann, wenn $\mathcal{U}$ die Bedingungen A) und A*) erfüllt.

Beweis: Es bleibt nur zu zeigen, dass bereits die Bedingungen A) und A*) genügen. Sei dazu die folgende Situation in $\mathcal{U}$:



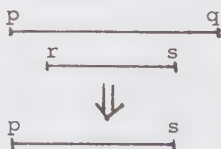
Nach A*) ist $[s+1, u]$ in $\mathcal{U}$ und damit nach A) auch $[p, s]$.

$\mathcal{U}$ erfüllt somit die Bedingung B). Der Beweis für B*) geht dual.

Definitionen: Eine Intervallmenge $\mathcal{U}$ heisst zusammenhängend, falls für je zwei Intervalle I, J aus $\mathcal{U}$ mit $i \in I, j \in J$ gilt: für jedes t mit $i \leq t \leq j$ gibt es ein Intervall K in $\mathcal{U}$ mit $[t, t+1] \subset K$.

Eine Intervallmenge $\mathcal{U}$ erfüllt die Bedingung C), falls für $[p, q]$ und $[r, s]$ aus $\mathcal{U}$ mit $p < r \leq s < q$ auch $[p, s]$ in $\mathcal{U}$ ist.

Anschaulich:



- Satz 4.16 1) Ein Ringhomomorphismus $f: D \longrightarrow S$ ist genau dann
- ein Ringepimorphismus, wenn es eine Intervallmenge $\mathcal{M}$ gibt, die A) und A*) erfüllt, so dass mit $M = \bigoplus_{I \in \mathcal{M}} k_I$ f die M -Lokalisierung von D ist.
- 2) Zusätzlich ist S genau dann unzerlegbarer Ring, wenn $\mathcal{M}$ neben A) und A*) noch zusammenhängend ist und die Bedingung C) erfüllt. In diesem Fall ist S Faktoring eines Oberringes von D .

Beweis von 1): Erfüllt $\mathcal{M}$ die Bedingungen A) und A*), ist nach Korollar 4.15 $L(\mathcal{M}) = \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ bezüglich Colimites abgeschlossen. Nach Lemma 1.6 ist jeder D_M -Modul M -torsionsfrei und mit Hilfe von Korollar 4.5 ist $D \longrightarrow D_M$ ein Epimorphismus. Ist umgekehrt f ein Epimorphismus, nehmen wir einen injektiven Cogenerator E in $S\text{-Mod}$. E ist $\mathcal{L}$ -injektiver D -Modul und es ist $L(E) = S\text{-Mod}$ mit $-_E \cong S \otimes_D ?$ ([5] Beispiel 2.2 und Beweis von Korollar 2.7) Wir definieren $\mathcal{M} := \{J / k_J \text{ ist in } L(E)\}$. Da $\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = L(E)$, erfüllt $\mathcal{M}$ die Bedingungen A) und A*). Es bleibt zu zeigen, dass f die M -Lokalisierung von D ist. Weil $L(E) = \mathcal{L}_{\mathcal{M}} = L(M)$, sind nach Lemma 1.3 E und M zueinander ähnlich. Nun ist $-_M \cong -_E \cong S \otimes_D ?$ und f ist die M -Lokalisierung von D .

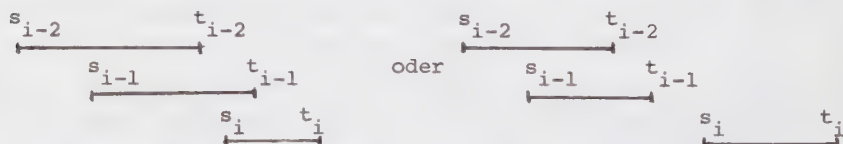
Beweis von 2) Erfüllt $\mathcal{M}$ zusätzlich noch die Bedingung C) und ist $\mathcal{M}$ zusammenhängend, berechnen wir $D_M = \bigoplus_{i=1}^n (k_{[i, i]})_M$. Nach Konstruktion der M -Lokalisierung von k_J im Beweis von Lemma 4.14 ist wegen der Bedingung C) $(k_{[i, i]})_M$ für jedes i unzerlegbar, denn eine echte Schachtelung von Intervallen ist nicht mehr möglich. Es ist also $(k_{[i, j]})_M = k_{[s, t]}$ mit $s \leq i \leq t$. Damit ist auch $(k_{[i, j]})_M = k_{[s, t]}$ für alle j mit $i \leq j \leq t$. D_M wird als D -Modul isomorph zum folgenden Modul:

$$\left[\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \end{array} &
 \begin{array}{c} \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \end{array} &
 \end{array} \right] \quad (*)$$

Das zu D_i gehörende Intervall sei $[s_i, t_i]$. Es ist $s_i \leq s_{i+1}$ und $t_i \leq t_{i+1}$. Ferner gilt die Beziehung

$$(**) s_i \in \{s_1, t_1+1, t_2+1, \dots, t_{i-2}+1\} \text{ für } i > 2.$$

Zum Beweis von (**): wäre $s_i > t_{i-2}+1$, hätten wir eine der beiden folgenden Situationen:



In der ersten Situation hätten wir mit $[s_{i-1}, t_{i-1}]$ bei der Lokalisierung von $k_{[t_{i-2}, t_i]}$ nicht das kürzeste Intervall genommen. In der zweiten Situation wäre $k_{[s_i, t_i]}$ nicht die Lokalisierung von $k_{[t_{i-2}+1, t_i]}$ denn es gibt in $\mathcal{U}$ ein Intervall K mit $[s_{i-1}, s_i] \subset K$. Es folgt also $s_i \leq t_{i-2}+1$. Ist s_i verschieden von allen t_j+1 , so muss s_i gleich s_1 sein, denn andernfalls hätten wir bei der Lokalisierung eines $k_{[t, r]}$ nicht das kürzeste Intervall genommen. Damit ist (**) bewiesen. Mit analogen Überlegungen zeigt man $s_2 = s_1$.

Die Menge aller $n \times n$ Matrizen, die die Gestalt wie in (*) besitzen, bilden einen Ring F , welcher Faktoring eines Oberringes von D ist. Wir zeigen, dass der D -Isomorphismus $D_M \cong F$ ein Ringisomorphismus ist. Der natürliche Ringhomomorphismus $g: D \rightarrow F$ ist ein Epimorphismus, denn Oberringe von D sind epimorphe Erweiterungen von D .

(Bemerkung nach Korollar 4.13). g ist somit die F -Lokalisierung von D . Da andererseits $D \rightarrow D_M$ die D_M -Lokalisierung von D ist, folgt wegen $-_F = -_{D_M}$ die Behauptung. Mit Matrizenrechnung zeigt man, dass D_M unzerlegbarer Ring ist.

Sei umgekehrt $D \longrightarrow S$ ein Ringepimorphismus und S ein unzerlegbarer Ring. Die zugehörige Intervallmenge $\mathcal{M}$ ist zusammenhängend, denn andernfalls zerfällt S in zweiseitige Ideale (S zerfällt als Matrizenring in zwei Blöcke). Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{M}$ die Bedingung C) erfüllt. Wir nehmen dazu an, es gebe in $\mathcal{M}$ Intervalle $[p, q], [r, s]$ mit $p < r \leq s < q$ aber $[p, s]$ sei nicht in $\mathcal{M}$. Wir wählen r minimal. Nun sind für irgend ein Intervall $[x, y]$ aus $\mathcal{M}$ die folgenden Situationen unmöglich:

- i) denn sonst wäre $[r, q]$ in $\mathcal{M}$ (nach B^*) und damit wäre $[p, s]$ in $\mathcal{M}$ (nach B)
- ii) denn sonst wäre r nicht minimal
- iii) denn sonst wäre $[p, s]$ in $\mathcal{M}$ (nach B)

aus i) folgt: für $r \leq t \leq s$ hat die Lokalisierung von $k_{[p, q]}$ mindestens zwei unzerlegbare Summanden: $k_{[p, q]}$ und $k_{[r, s]}$.

Zusammen mit ii) und iii) folgt: für alle t mit $t < r$ oder $s < t$

ist $\text{Hom}_D((k_{[p, q]}^t)_M, k_{[r, s]}^t) = 0 = \text{Hom}_D(k_{[r, s]}^t, (k_{[p, q]}^t)_M)$.

Berechnen wir die Zerlegung von D_M als D -Modul, erhalten wir

$$D_M \cong \left(\begin{array}{c} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{array} \right) \times \text{Rest} =: D' \times R$$

(Das längste Intervall von $(k_{[1, i]}^t)_M$ ergibt dabei den Beitrag für D')

Dies ist aber eine Zerlegung von D_M in zweiseitige Ideale, denn

- a) D' und R sind M -lokalisiert und damit Linksideale von D_M
 b) Jeder Linksmodulhomomorphismus $f: D_M \longrightarrow D_M$ erfüllt wegen

$$\text{Hom}_D(D', R) = \text{Hom}_D(R, D') = 0 \quad f(D') \subset D' \quad \text{und} \quad f(R) \subset R.$$

Da Multiplikation von rechts mit einem d aus D_M ein Linksmodulhomomorphismus ist erhalten wir $D'd \subset D'$ bzw. $Rd \subset R$

Damit sind D' und R zweiseitige Ideale. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass S unzerlegbarer Ring sei.

Mit Hilfe dieses Satzes sind wir in der Lage, alle epimorphen Bilder von D anzugeben:

Sei $f: D \longrightarrow S$ ein Ringepimorphismus. Nach Prop. 4.2. ist f die S -Lokalisierung von D . Damit ist die Zerlegung von S als D -Modul auch eine Zerlegung von S als S -Modul, denn in $S = \bigoplus k_I$ sind alle k_I S -lokalisiert. S besitzt also eine Zerlegung $S = \bigoplus S_i$ in unzerlegbare Ideale von S . $D \longrightarrow S \longrightarrow S_i$ ist ein unzerlegbarer Epimorphismus und damit ein spezieller Matrizenring, bestehend aus Matrizen der Form (*) (Seite 35). Ist $S_i = \bigoplus_{I \in \mathcal{A}} k_I^{(n_I)}$ und $S_j = \bigoplus_{J \in \mathcal{B}} k_J^{(m_J)}$ so gilt für $i \neq j$ wegen $\text{Hom}_D(S_i, S_j) = 0$ die folgende Bedingung: Für je zwei Intervalle $I = [p, q]$ aus $\mathcal{A}$, $J = [r, s]$ aus $\mathcal{B}$ ist entweder $I \cap J = \emptyset$ oder $p < r \leq s < q$ oder $r < p \leq q < s$. Zudem erfüllen die beiden Intervallmengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ genau eine der folgenden drei Bedingungen: i) $I \cap J = \emptyset$ für alle I aus $\mathcal{A}$, J aus $\mathcal{B}$

ii) Es gibt ein I aus $\mathcal{A}$ mit $J \subset I$ für alle J aus $\mathcal{B}$

iii) Es gibt ein J aus $\mathcal{B}$ mit $I \subset J$ für alle I aus $\mathcal{A}$

Bevor wir die Umkehrung der obigen Aussage beweisen, haben wir für einen unzerlegbaren Ring S , der die Form (*) hat, die S -Moduln zu untersuchen. Sei dazu $S = \bigoplus_{i=1}^n k_{[s_i, t_i]}$ (Notation von Seite 35) Da $s_i \in \{s_1, t_1+1, t_2+1, \dots, t_{i-2}+1\}$ können wir die unzerlegbaren Summanden eines beliebigen S -Moduls X wie folgt bestimmen: als D -Modul sei $X = \bigoplus_{K \in \mathcal{K}} k_K^{(n_K)}$. Sicher ist $K \subset [s_1, t_r]$, denn X ist surjektives Bild von $S^{(A)}$ für eine geeignete Menge A . Es ist sogar $K = [x, y]$ mit $x \in \{s_1, s_2, \dots, s_r, t_1+1, t_2+1, \dots, t_{r-1}+1\}$ und $y \in \{t_1, t_2, \dots, t_r\}$ Aus dieser Überlegung folgt: sind S_i unzerlegbare Ringe der Form (*) und $\text{Hom}_D(S_i, S_j) = 0$ für $i \neq j$, so ist für jeden S_i -Modul X_i $\text{Hom}_D(X_i, X_j) = 0$ für $i \neq j$.

Nun können wir die Umkehrung zeigen. Sei $f: D \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus, $S = \bigoplus_{i=1}^n S_i$ eine Zerlegung in unzerlegbare Ringe der Form (*), $D \longrightarrow S_i$ kanonisch und $\text{Hom}_D(S_i, S_j) = 0$ für $i \neq j$. $D \longrightarrow S_i$ ist ein Epimorphismus, denn S_i ist Faktorring eines Ober-ringes von D .

Jeder S -Modul X ist zerlegbar in $X = \bigoplus X_i$, wo X_i ein S_i -Modul ist. Ist Y ein weiterer S -Modul, $Y = \bigoplus Y_i$ und $f: X \longrightarrow Y$ beliebig D -linear, ist wegen $\text{Hom}_D(X_i, Y_j) = 0$ für $i \neq j$ $f(X_i) \subset Y_i$.

Es gibt somit D -lineare Homomorphismen $f_i: X_i \longrightarrow Y_i$ mit $f(\sum x_i) = \sum f_i(x_i)$. Nun ist f S -linear, denn mit $s = s_1 + s_2 + \dots + s_r$ erhalten wir: $sf(\sum x_i) = s \sum f_i(x_i) = \sum s_i f_i(x_i) = \sum f_i(s_i x_i)$

$$= f(\sum s_i x_i) = f(s \sum x_i)$$

S -Mod ist volle Unterkategorie von D -Mod. Dies war aber gerade zu zeigen.

Literaturliste

- [1] Beachy J.A. On Morita's Localisation, J.Algebra 38 (1976) 225-243.
- [2] Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen I , Manuscripta math. 6 ,
(1972), 71 - 103.
- [3] Hauger G., Zimmermann W. Lokalisierung und Morita's F_h -Bedingung,
Comm. Algebra 4 (1976), 199-217.
- [4] Knörr R. Morita-injektive Moduln über kommutativen Dedekind-
ringen, J.Reine Angew. Math. 281 (1976) , 149-163.
- [5] Lambek J. Localisation at Epimorphisms and Quasi-injectives,
J. Algebra 38 (1976), 163-181 .
- [6] Lambek J., Rattray B.A. Localisation at Injectives in Complete
Categories, Proc.Amer.Math.Soc. 41 (1973), 1 - 9 .
- [7] Morita K. Localisation in Categories of Modules I,
Math. Z. 114 (1970), 121-144 .
- [8] Morita K. Localisation in Categories of Modules III,
Math. Z. 119 (1971), 313-320 .
- [9] Morita K. Flat Modules. Injective Modules and Quotient Rings,
Math. Z. 120 (1971), 25-40 .
- [10] Morita K. Quotient rings. In " Ring Theory" by R. Gordon (ed.)
Academic Press, New York (1972)
- [11] Popescu N., Spiricu T. Quelques observations sur les épimorphismes
plats (à gauche) d'anneau, J.Algebra 16 (1970), 40-59 .
- [12] Silver L. Noncommutative Localisations and Applications,
J. Algebra 7 (1967), 44-76 .
- [13] Stenström B. Rings of Quotients, Grundlehren der mathematischen
Wissenschaften, Band 217, Springer Verlag Berlin, Heidelberg,
New York 1975 .
- [14] Storrer H.H. Epimorphic Extensions of Non-commutative Rings,
Comment. Math. Helv. 48 (1973) , 72 - 86 .

Lebenslauf

Am 10. September 1952 wurde ich , Hans Martin Aeppli , in Zürich als Bürger von Maur (ZH) geboren. Ab Frühjahr 1965 besuchte ich das kantonale Gymnasium in Winterthur, welches ich im Herbst 1971 mit dem Maturitätszeugnis Typus B verliess. Es folgte die Immatrikulation an der Universität Zürich, mit Hauptfach Mathematik und Nebenfächern Physik bzw. Astronomie. Im Sommer 1976 erhielt ich das Diplom in Mathematik, im Frühjahr 1978 das Diplom für das höhere Lehramt. Während dieser Zeit besuchte ich Vorlesungen und Uebungen bei den Professoren E. Brun, P. Gabriel, H. Gross, P. Hess, H. Jarchow, H.H. Keller, A. Kriszten, W. Kündig, V. Meyer, E. Schweizer H.H.Storrer, K. Strebel, F. Ulmer, M. Waldmeier und O. Woodtli. Die Dissertation entstand unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. H.H. Storrer, bei dem ich mich an dieser Stelle für seine vorbildliche Betreuung bedanke. Mein Dank geht auch an Herrn Prof. Dr. P. Gabriel für seine Anregungen.

Im Moment bin ich Assistent am mathematischen Institut der Universität Zürich und Hilfslehrer an der Kantonsschule Hottingen (ZH).

